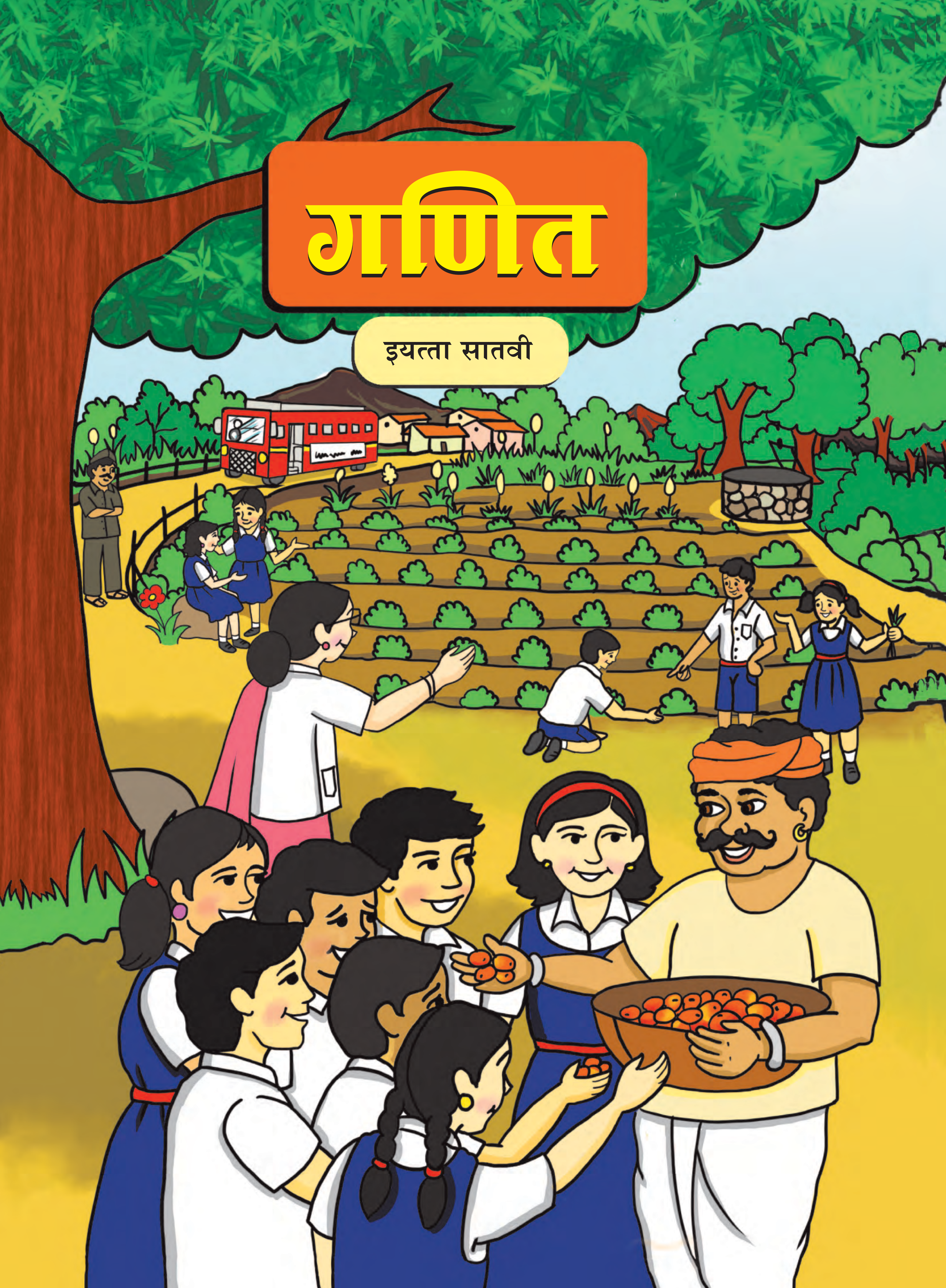
गणित

इयत्ता सातवी



भारताचे संविधान

भाग ४ क

नागरिकांची मूलभूत कर्तव्ये

अनुच्छेद ५१ क

मूलभूत कर्तव्ये – प्रत्येक भारतीय नागरिकाचे हे कर्तव्य असेल की त्याने –

(क) प्रत्येक नागरिकाने संविधानाचे पालन करावे. संविधानातील आदर्शांचा, राष्ट्रध्वज व राष्ट्रगीताचा आदर करावा.

(ख) स्वातंत्र्याच्या चळवळीला प्रेरणा देणाऱ्या आदर्शांचे पालन करावे.

(ग) देशाचे सार्वभौमत्व, एकता व अखंडत्व सुरक्षित ठेवण्यासाठी प्रयत्नशील असावे.

(घ) आपल्या देशाचे रक्षण करावे, देशाची सेवा करावी.

(ङ) सर्व प्रकारचे भेद विसरून एकोपा वाढवावा व बंधुत्वाची भावना जोपासावी. स्त्रियांच्या प्रतिष्ठेला कमीपणा आणतील अशा प्रथांचा त्याग करावा.

(च) आपल्या संमिश्र संस्कृतीच्या वारशाचे जतन करावे.

(छ) नैसर्गिक पर्यावरणाचे जतन करावे. सजीव प्राण्यांबद्दल दयाबुद्धी बाळगावी.

(ज) वैज्ञानिक दृष्टी, मानवतावाद आणि जिज्ञासूवृत्ती अंगी बाळगावी.

(झ) सार्वजनिक मालमत्तेचे जतन करावे. हिंसेचा त्याग करावा.

(ञ) देशाची उत्तरोत्तर प्रगती होण्यासाठी व्यक्तिगत व सामूहिक कार्यात उच्चत्वाची पातळी गाठण्याचा प्रयत्न करावा.

(ट) ६ ते १४ वयोगटातील आपल्या पाल्यांना पालकांनी शिक्षणाच्या संधी उपलब्ध करून द्याव्यात.

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दि. ३.३.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

इयत्ता सातवी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४.

39JIXC

आपल्या स्मार्टफोनवरील DIKSHA App द्वारे पाठ्यपुस्तकाच्या पहिल्या पृष्ठावरील Q. R. Code द्वारे डिजिटल पाठ्यपुस्तक व प्रत्येक पाठामध्ये असलेल्या Q. R. Code द्वारे त्या पाठासंबंधित अध्ययन अध्यापनासाठी उपयुक्त दृकश्राव्य साहित्य उपलब्ध होईल.

प्रथमावृत्ती : 2017
पाचवे पुनर्मुद्रण : 2022

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. दादासो सरडे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५.

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती पूजा जाधव	श्री. अन्सार शेख
श्री. गणेश कोलते	श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. रामा व्हन्याळकर	श्री. प्रकाश झेंडे
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे	श्री. बन्सी हावळे
श्री. उमेश रेळे	श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. आण्णापा परीट	श्री. सूर्यकांत शहाणे
श्री. श्रीपाद देशपांडे	श्री. सुरेश दाते
श्री. राजेंद्र चौधरी	श्री. प्रकाश कापसे
श्री. चंदन कुलकर्णी	श्री. सलीम हाश्मी
श्रीमती अनिता जावे	श्रीमती आर्या भिडे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण	श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. कल्याण कडेकर	श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. संदेश सोनावणे	श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. सुजित शिंदे	श्री. सुधीर पाटील
डॉ. हनुमंत जगताप	श्री. राजाराम बंडगर
श्री. प्रताप काशिद	श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. काशिराम बाविसाने	श्री. सागर सकुडे
श्री. पप्पु गाडे	श्री. प्रदीप गोडसे
	श्री. रवींद्र खंदारे

श्रीमती प्राजक्ती गोखले (निमंत्रित सदस्य)

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

मुखपृष्ठ व सजावट : धनश्री मोकाशी, पुणे.

संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई.

चित्रकार : धनश्री मोकाशी.

निर्मिती : **सचिन मेहता**
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहा. निर्मिती अधिकारी

अक्षरजुळणी : गणित विभाग,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

कागद : ७० जी.एस.एम. क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश :

मुद्रक :

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्‌धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्‌वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन–अधिनायक जय हे
भारत–भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत–भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

तुम्हां सर्वांचे सातवीच्या वर्गात स्वागत आहे. गणित इयत्ता पहिली ते सहावीपर्यंतची पाठ्यपुस्तके तुम्ही अभ्यासली आहेत. गणिताचे सातवीचे पाठ्यपुस्तक तुमच्या हाती देताना आम्हांला आनंद वाटतो आहे.

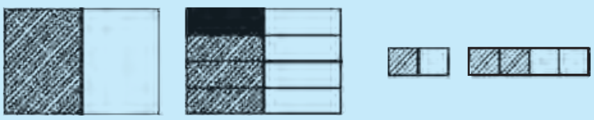
हा विषय नीट समजावा, मनोरंजक वाटावा, नवे ज्ञान मिळवण्याचा व नवे प्रश्न सोडवण्याचा आनंद तुम्हांला मिळावा असे आम्हांला वाटते. त्यासाठी पाठ्यपुस्तकात काही कृती व रचना दिल्या आहेत त्या जरूर करून पाहा. त्यांमधून काही गंमत, नवे गुणधर्म लक्षात येतात का ते पाहा. आपापसात चर्चा करून नवे मुद्दे समजू शकतात. चित्रे, वेन आकृत्या व इंटरनेटच्या साहाय्याने गणित समजणे सोपे होते. हे मुद्दे नीट समजले तर गणित मुळीच अवघड नाही. पाठ्यपुस्तकातील प्रत्येक प्रकरण तुम्ही नीट लक्ष देऊन वाचावे अशी अपेक्षा आहे. एखादा भाग समजला नाही तर शिक्षक, पालक किंवा इतर विद्यार्थ्यांच्या मदतीने तो समजावून घ्या. गणित सोडवण्याची रीत तसेच त्याचे सूत्र का व कसे तयार झाले याचे स्पष्टीकरण या पुस्तकात दिले आहे. त्या रीती वापरून उदाहरणे सोडवण्याचा सराव करा. तो महत्त्वाचा आहे. सरावसंचांत दिलेल्या उदाहरणांसारखी जास्तीची उदाहरणे तुम्हीही तयार करा. अधिक आव्हानात्मक उदाहरणे या पाठ्यपुस्तकात तारांकित करून दिली आहेत. अधिक माहितीसाठी दिलेल्या चौकटीतील मजकूर हा तुम्हांला पुढील अभ्यासासाठी निश्चित उपयोगी पडेल. पहिलीपासून शिकलेले गणित तुम्हांला पुढेही सतत वापरावे लागते. उदाहरणार्थ, बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार हे तुम्हांला विसरून चालणार नाही बरं का! त्यांचा सराव करा. या सर्व क्रिया, उदाहरणे सोडवताना अनेकदा कराव्या लागतात.

सातवीच्या गणितात अनेक मूलभूत संकल्पना आहेत. त्या नीट समजल्या तर पुढच्या इयत्तेचा अभ्यास सोपा होईल. चला तर मग, हे पुस्तक गणित समजावून घेण्यासाठी तुमचा दोस्त होते की नाही ते पहा बरे !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.

पुणे
दिनांक : २८ मार्च २०१७
भारतीय सौर दिनांक : ७ चैत्र १९३९

गणित इयत्ता सातवी अध्ययन निष्पत्ती

सुचवलेली शैक्षणिक प्रक्रिया	अध्ययन निष्पत्ती
अध्ययन कर्त्यास, एकट्याने/ जोडीने/ गटाने, संधी देऊन प्रवृत्त करणे. संदर्भ दिला असता, पूर्णांक संख्यातील गुणाकार आणि भागाकार यांचे नियम शोधणे. हे संख्यारेषा किंवा संख्या आकृतिबंधाच्या मदतीने करता येईल. उदाहरणार्थ : $3 \times 2 = 6$ $3 \times 1 = 3$ $3 \times 0 = 0$ $3 \times (-1) = -3$ $3 \times (-2) = -6$ ही संख्या 1 ने कमी केली. ही संख्या 3 ने कमी झाली. म्हणून $3 \times (-3) = -9$ म्हणजेच धन पूर्णांकाला ऋण पूर्णांकाने गुणले असता उत्तर ऋण पूर्णांक येते. उदाहरणार्थ (a) $1/4 \times 1/2$ हा $1/2$ चा $1/4$ म्हणजे $1/8$ (b) $1/2 \div 1/4$ हा $1/2$ मध्ये दोन $1/4$ आहेत.  दैनंदिन जीवनातील उदाहरणे सोडवण्यासाठी चित्रे काढून किंवा कागदाच्या घड्या घालून अपूर्णांकांचा किंवा दशांश अपूर्णांकांचा गुणाकारा किंवा भागाकार दर्शवतो. • झाडाच्या दहा पूर्णांक एक छेद दोन मीटर उजवीकडे किंवा पंधरा पूर्णांक दोन छेद तीन मीटर डावीकडे अशांसारख्या विरुद्ध दिशेला असणाऱ्या अपूर्णांकांची गरज असणाऱ्या परिस्थितीबाबत चर्चा करणे. • एकाच संख्येचा पुन्हा पुन्हा गुणाकार संक्षिप्त रूपात व्यक्त करता येऊ शकतो हे चर्चेतून विद्यार्थ्यांच्या निदर्शनास आणून देणे. उदा. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ हे 2^6 असेही व्यक्त करू शकतो. • चल संख्या आणि स्थिरांक यांचे एकत्रीकरण करून वेगवेगळ्या क्रियांचा वापर करून, विविध संदर्भात बैजिक राशी तयार करणे.	**अध्ययनार्थी** 07.71.01 दोन पूर्णांकांचा गुणाकार/भागाकार करतात. 07.71.02 अपूर्णांकांच्या गुणाकार व भागाकाराचे अर्थनिर्वचन करतात. उदाहरणार्थ, $2/3 \times 4/5$ याचा अर्थ $4/5$ चा $2/3$ तसेच $1/2 \div 1/4$ याचा अर्थ किती वेळा $1/4$ म्हणजे $1/2$? 07.71.03 साध्या व दशांश अपूर्णांकांचा गुणाकार व भागाकार करण्यासाठी नियम वापरतात. 07.71.04 परिमेय संख्यांचा संबंध असणारे दैनंदिन जीवनातील प्रश्न सोडवतात. 07.71.05 मोठ्या संख्यांचे गुणाकार, भागाकार करण्यासाठी संख्यांच्या घातांकित रूपाचा उपयोग करतात. 07.71.06 दैनंदिन जीवनातील विविध परिस्थिती साध्या समीकरणांच्या रूपात मांडून समीकरणे सोडवतात. 07.71.07 बैजिक राशींची बेरीज, वजाबाकी करतात. 07.71.08 प्रमाणात असलेल्या आणि प्रमाणात नसलेल्या राशी (संख्या) ओळखतात. उदाहरणार्थ, 15/45 आणि 40/120 या संख्या समान आहेत म्हणून 15, 45, 40, 120 या संख्या प्रमाणात आहेत असे सांगतात. 07.71.09 शतमानाचे साध्या व दशांश अपूर्णांकांत रूपांतर करण्याचे प्रश्न तसेच उलट प्रकारचे प्रश्न सोडवतात. 07.71.10 गुणधर्मांच्या आधारे रेषीय जोडी, पूरक कोन जोडी, काटकोनांची जोडी, संलग्न कोनांची जोडी आणि विरुद्ध कोनांची जोडी या जोड्यांचे वर्गीकरण करतात. प्रत्येक जोडीतील एका कोनाचे माप दिले असता, दुसऱ्या कोनाचे माप ठरवतात. 07.71.11 त्रिकोणाचे दोन कोन दिले असता, तिसऱ्या कोनाचे माप शोधतात. 07.71.12 चौरसाकार आणि आयताकार आकारांचे क्षेत्रफळ काढतात. 07.71.13 दैनंदिन व्यवहारातील अनुभवांतून जमवलेल्या सांख्यिक माहितीवरून प्रातिनिधिक संख्या (मध्य) काढतात.

• समीकरण तयार करण्यासाठी दैनंदिन जीवनातील विविध परिस्थिती पुरवणे आणि दोन्ही बाजू समान करेल अशी चलांची योग्य किंमत निवडणे. • दैनंदिन जीवनातील समान प्रकारच्या वस्तूंची बेरीज/वजाबाकी करण्याची कृती करणे. उदा. 3 वह्या आणि 5 वह्या यांची बेरीज केली तर मिळणाऱ्या वह्यांची सख्या. • गुणोत्तर आणि शतमान ही संकल्पना विकसित होण्यासाठी चर्चा करणे. (गुणोत्तराची समानता) • नफा / तोटा, सरळव्याज यांवर आधारित दैनंदिन जीवनातील घटना पुरवणे, शतमानाचा उपयोग दाखवणे. • सामाईक शिरोबिंदू असलेल्या कोनांच्या जोडीची दैनंदिन जीवनातील वेगवेगळी उदाहरणे शोधणे. (कात्री, रस्त्यांचा जोड, X व T ही अक्षरे इत्यादी) • कोनांच्या जोड्यांच्या आकृत्या काढून विविध गुणधर्म पडताळणे. (एक गट एका कोनाचे माप सांगेल तर दुसऱ्या गटाने उरलेल्या कोनांचे माप सांगावे.) • विविध कोनांच्या जोड्यांमधील संबंधांची तसेच त्रिकोणाचे कोन आणि त्याच्या बाजू यांतील संबंधांची, गणिताचे साहित्य वापरून प्रात्यक्षिके करणे. • वेगवेगळ्या प्रकारचे त्रिकोण काढून त्या सर्व त्रिकोणांचे कोन मोजून पडताळा घेण्यास सांगणे. • त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचा गुणधर्म आणि पायथागोरसचे प्रमेय शोधणे. • आधी एकरूपतेचे निकष ठरवून आणि नंतर एकमेकांवर ठेवून एकरूपता गुणधर्माचा पडताळा घेणे. • कंपास आणि पट्टीचा वापर करून साधा त्रिकोण काढणे. • दिलेल्या सामग्रीची प्रातिनिधिक किंमत काढणे म्हणजेच अवर्गीकृत सामग्रीचे मध्य हे सारणीमध्ये लिहिणे आणि स्तंभालेखाने दाखवण्यासाठी त्यांना प्रवृत्त करणे. • जमा केलेल्या सामग्रीवरून, भविष्यातील घटनांसाठी अनुमान काढणे. • त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते. हा गुणधर्म समजणे.	07.71.14 स्तंभालेखावरून माहितीचे अर्थनिर्वचन करतात. उदाहरणार्थ, उन्हाळ्यापेक्षा थंडीमध्ये विजेचा वापर जास्त असतो, पहिल्या दहा षटकांमध्ये एखाद्या संघाने काढलेल्या धावा इत्यादी. 07.71.15 त्रिकोणाचे कोनदुभाजक व त्याच्या बाजूंचे लंबदुभाजक काढतात व ते एकसंपाती असतात हे ओळखतात. 07.71.16 विशिष्ट बाजू व कोन दिले असता त्रिकोण काढतात. 07.71.17 कोन, रेषाखंड व वर्तुळ यांची एकरुपता ओळखतात. 07.71.18 मूळ अवयव पाडून संख्याचा मसावि व लसावि काढतात. 07.71.19 त्रिकोणाचे बाह्यकोन ओळखतात. 07.71.20 बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांच्या बेरजेचे सूत्र तयार करतात. 07.71.21 मूळ अवयव पद्धतीने संख्येचे वर्गमूळ काढतात. 07.71.22 दिलेल्या माहितीवरुन जोडस्तंभालेख काढतात व वाचतात. 07.71.23 भागीदारीचे व्यवहार करताना प्रमाणाचा उपयोग करतात. 07.71.24 वर्तुळाच्या परिघाचे सूत्र काढतात व त्याचा उपयोग करतात. 07.71.25 वर्तुळाचा लघुकंस,विशालकंस ओळखतात व कंसाचे माप ठरवतात. 07.71.26 त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ सूत्र तयार करतात. 07.71.27 घन व इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ काढतात. 07.71.28 पायथागोरसच्या सिद्धांताचा उपयोग करून काटकोन त्रिकोणाची बाजू काढतात. 07.71.29 वर्ग विस्ताराचे सूत्र वापरतात. 07.71.30 व्दिपदीचे वर्ग करतात. 07.71.31 व्दिपदीचे अवयव पाडतात.

शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक मुद्दे

इयत्ता सातवीच्या पाठ्यपुस्तकाचा उपयोग वर्गामध्ये प्रश्नोत्तरे, कृती, चर्चा व विद्यार्थ्यांशी संवाद या विविध माध्यमांतून होणे आवश्यक आहे त्यासाठी पाठ्यपुस्तकाचे सखोल वाचन करावे. पाठ्यपुस्तकात आपला परिसर, भूगोल, विज्ञान, अर्थशास्त्र या सर्व विषयांचा गणिताशी समन्वय साधला आहे. अशा अनेक विषयांमध्ये गणितातील संकल्पनांचा उपयोग होतो हे शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना दाखवावे. गणितातील संकल्पनांचे स्पष्टीकरण सोप्या भाषेत दिले आहे. सराव संचात दिलेल्या उदाहरणांवर आधारित अनेक उदाहरणे शिक्षकांनी तयार करुन विद्यार्थ्यांना सोडवण्यास द्यावीत व त्यांनाही नवीन उदाहरणे तयार करण्यास प्रोत्साहन द्यावे. विद्यार्थ्यांसाठी काही आव्हानात्मक प्रश्न तारांकित स्वरुपात दिले आहेत. 'अधिक माहितीसाठी' या शीर्षकाखाली थोडी जास्तीची माहिती दिली आहे. ही माहिती गणिताचा पुढील अभ्यास करताना विद्यार्थ्यांना निश्चित उपयोगी पडेल.

अनुक्रमणिका

विभाग पहिला

विभाग दुसरा

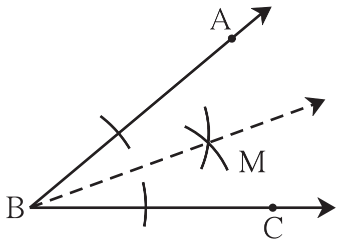
1 भौमितिक रचना

विभाग पहिला

जरा आठवूया.

- आपण मागील इयत्तांमध्ये रेषा, रेषाखंड, कोन, कोनदुभाजक इत्यादींचा अभ्यास केला आहे. आपण कोनाचे माप अंशांमध्ये मोजतो. $\angle ABC$ चे माप 40° असेल, तर ती माहिती आपण $m\angle ABC = 40^\circ$ अशी लिहितो.

कोनदुभाजक (Angle bisector)



शेजारी $\angle ABC$ ची आकृती दिली आहे. कोनदुभाजक कोनाचे दोन समान भाग करतो. किरण BM हा $\angle ABC$ चा दुभाजक आहे का ?

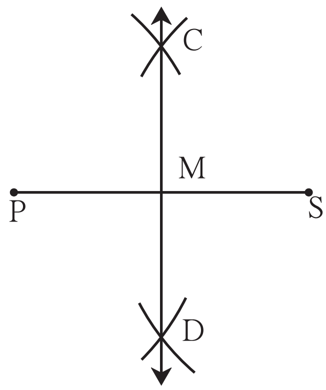
रेषाखंडाचा लंबदुभाजक (Perpendicular bisector of a line segment)

4 सेमी लांबीचा रेषाखंड PS काढा व त्याचा लंबदुभाजक काढा. त्याला रेषा CD हे नाव द्या.

- रेषा CD लंबदुभाजक आहे का, हे पडताळण्यासाठी काय कराल ?

  $m\angle CMS = \boxed{}^\circ$

- $l(PM) = l(SM)$ आहे का ?

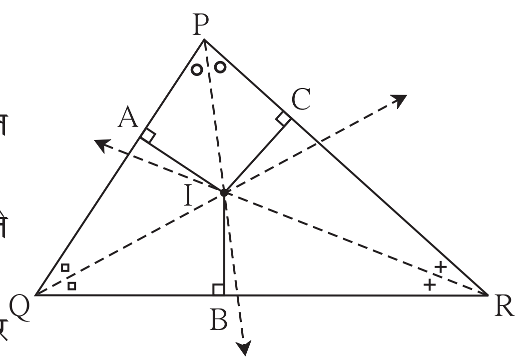


जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या कोनांच्या दुभाजकांचा गुणधर्म

कृती

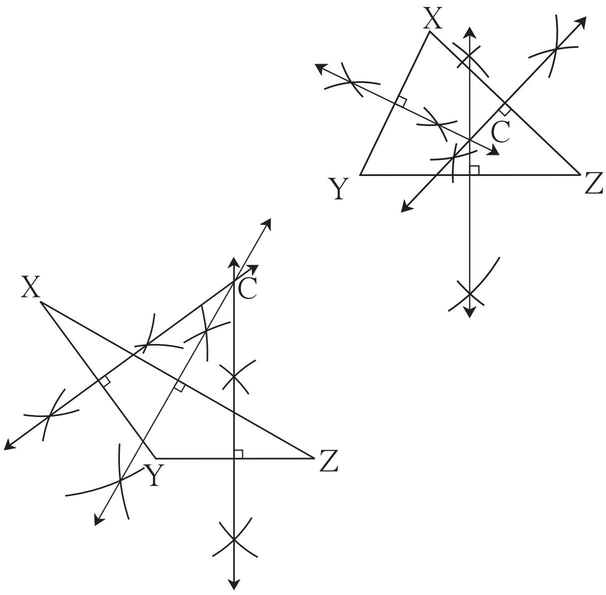
1. ΔPQR हा कोणताही त्रिकोण काढा.
2. कंपासच्या साहाय्याने त्रिकोणाचे तीनही कोन दुभागा. (दुभाजक पुरेसे मोठे नसल्यास ते वाढवून एकमेकांना छेदतील असे पाहा.)
3. हे तीनही कोनदुभाजक एकाच बिंदूतून जातात म्हणजेच ते **एकसंपाती** आहेत. त्या संपात बिंदूला I नाव द्या.
4. त्रिकोणात I पासून त्रिकोणाच्या बाजू PQ, QR व PR वर अनुक्रमे IA, IB, IC हे लंब काढा. या तीनही लंबांची लांबी मोजा. काय दिसते ? IA = IB = IC याचा अनुभव घ्या.



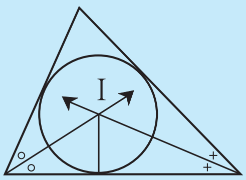
त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकांचा गुणधर्म

कृती

1. पट्टीच्या साहाय्याने एक लघुकोन त्रिकोण व एक विशालकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक काढा.
2. प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती आहेत हे अनुभवा.
3. त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक ज्या बिंदूत मिळतात, त्या बिंदूला C नाव द्या. C बिंदूपासून त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंपर्यंतची अंतरे मोजा. काय दिसते ?
   CX = CY = CZ हे अनुभवा.
4. लंबदुभाजकांचा संपात बिंदू कोठे आहे याचे निरीक्षण करा.

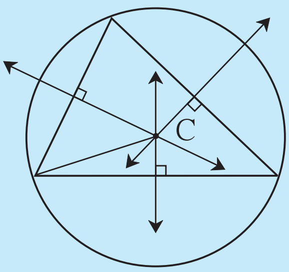


✸ अधिक माहितीसाठी



(1) त्रिकोणाचे कोनदुभाजक **एकसंपाती** (concurrent) असतात. त्यांच्या संपातबिंदूस **अंतर्मध्य** (incentre) म्हणतात. तो I या अक्षराने दर्शवला आहे.

(2) त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक **एकसंपाती** असतात. त्यांच्या संपात बिंदूस **परिमध्य** किंवा **परिकेंद्र** (circumcentre) म्हणतात. तो C या अक्षराने दर्शवला आहे.



सरावसंच 1

1. खाली दिलेल्या मापांचे रेषाखंड काढा व त्यांचे लंबदुभाजक काढा.
   (1) 5.3 सेमी (2) 6.7 सेमी (3) 3.8 सेमी
2. खाली दिलेल्या मापांचे कोन काढा व त्यांचे दुभाजक काढा.
   (1) 105° (2) 55° (3) 90°
3. एक विशालकोन त्रिकोण व एक काटकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक त्रिकोणातील कोनदुभाजकांचा संपात बिंदू काढा. प्रत्येक त्रिकोणातील संपात बिंदू कोठे आहे ?
4. एक काटकोन त्रिकोण काढा. त्याच्या भुजांचे लंबदुभाजक काढा. त्यांचा संपात बिंदू कोठे आहे ?

5*. मैथिली, शैला व अजय हे तिघे एका शहरात वेगवेगळ्या ठिकाणी राहत असून त्यांच्या घरांपासून समान अंतरावर खेळण्यांचे एक दुकान आहे. हे आकृतीच्या साहाय्याने दर्शवण्यासाठी कोणती भौमितिक रचना वापरावी ? स्पष्टीकरण द्या.

जाणून घेऊया.

त्रिकोण रचना

कृती

काही कोनांची व भुजांची मापे दिली असता त्रिकोण काढता येतो का ते पाहा.

ΔABC असा काढा की $l(AB) = 4$ सेमी, $l(BC) = 3$ सेमी

- असा त्रिकोण काढता येईल का ?
- या अटी पाळणारे अनेक त्रिकोण काढता येतात. हे अनुभवा.
- या माहितीवरून एकमेव त्रिकोण काढता यावा अशी अपेक्षा असेल तर आणखी कोणती अट घालावी लागेल ?

कोणतीही इमारत बांधण्यापूर्वी त्या इमारतीची रचना सर्वप्रथम कागदावर काढली जाते. त्या इमारतीची छोटी प्रतिकृती बनवलेली सुद्धा तुम्ही पाहिली असेल. त्या रेखाटनाच्या आधारे इमारत बांधणे सोपे जाते. त्याचप्रमाणे कोणतीही भौमितिक रचना करण्यापूर्वी त्या रचनेची कच्ची आकृती काढून घेतल्यास दिलेली रचना करण्यास मदत होते. रचनेतील क्रियांचा क्रम ठरवता येतो.

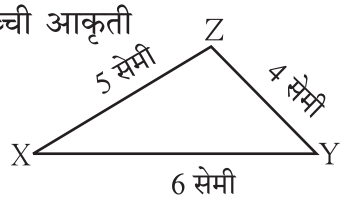
(I) त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढणे.

उदा. ΔXYZ असा काढा की $l(XY) = 6$ सेमी, $l(YZ) = 4$ सेमी, $l(XZ) = 5$ सेमी

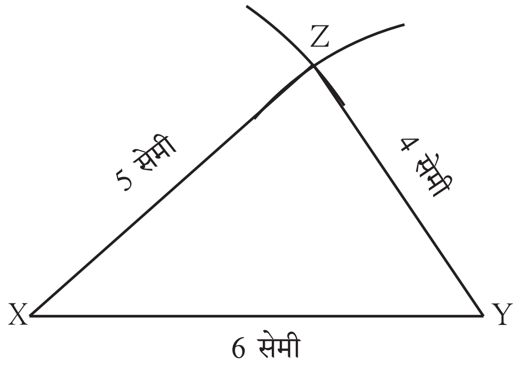
कच्ची आकृती काढताना दिलेली माहिती चटकन व शक्य तेवढ्या योग्य प्रमाणात दाखवूया. उदाहरणात बाजू XY सर्वांत मोठी आहे, म्हणून कच्च्या आकृतीतही ती तशीच असावी.

आकृती काढण्याच्या पायऱ्या.

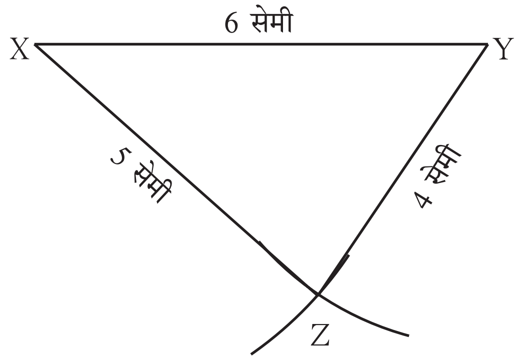
कच्ची आकृती



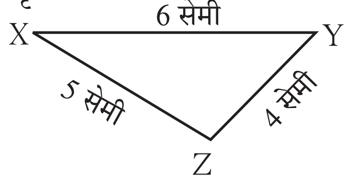
1. कच्च्या आकृतीप्रमाणे रेख XY हा 6 सेमी लांबीचा पाया घेतला आहे.
2. रेख XZ ची लांबी 5 सेमी असल्यामुळे कंपासमध्ये 5 सेमी अंतर घेऊन कंपासचे लोखंडी टोक X वर ठेवून रेख XY च्या एका बाजूला एक कंस काढला.
3. कंपासमध्ये 4 सेमी अंतर घेऊन कंपासचे लोखंडी टोक Y वर ठेवून आधी काढलेल्या कंसाला छेदणारा कंस काढला. छेदनबिंदूला Z नाव दिले. रेख XZ व रेख YZ काढले.



पायाच्या दुसऱ्या बाजूस कंस काढून तशीच त्रिकोण रचना करून दाखवली आहे.



कच्ची आकृती



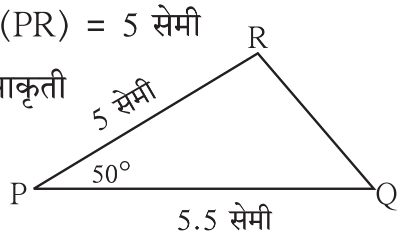
1. खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.
   (a) ΔABC मध्ये $l(AB) = 5.5$ सेमी, $l(BC) = 4.2$ सेमी, $l(AC) = 3.5$ सेमी
   (b) ΔSTU मध्ये $l(ST) = 7$ सेमी, $l(TU) = 4$ सेमी, $l(SU) = 5$ सेमी
   (c) ΔPQR मध्ये $l(PQ) = 6$ सेमी, $l(QR) = 3.8$ सेमी, $l(PR) = 4.5$ सेमी
2. पाया 5 सेमी व उरलेल्या प्रत्येक भुजेची लांबी 3.5 सेमी असलेला समद्विभुज त्रिकोण काढा.
3. बाजू 6.5 सेमी असलेल्या समभुज त्रिकोणाची रचना करा.
4. तुम्ही स्वत: बाजूंची लांबी घ्या व एक समभुज त्रिकोण, एक समद्विभुज त्रिकोण व एक विषमभुज त्रिकोण काढा.

(II) त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

उदा. ΔPQR असा काढा की $l(PQ) = 5.5$ सेमी, $m\angle P = 50^\circ$, $l(PR) = 5$ सेमी

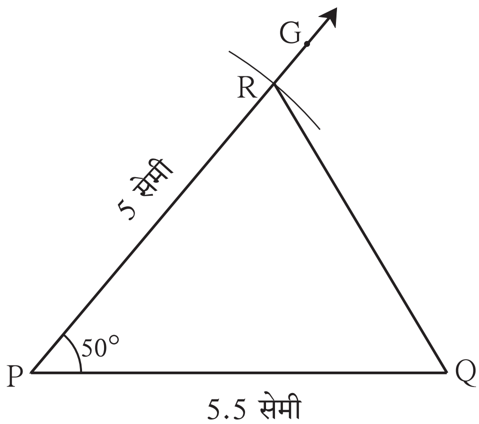
(कच्ची आकृती काढून त्यामध्ये दिलेली माहिती दाखवली आहे. $\angle P$ लघुकोन आहे. तसा कच्च्या आकृतीतही काढला आहे.)

कच्ची आकृती



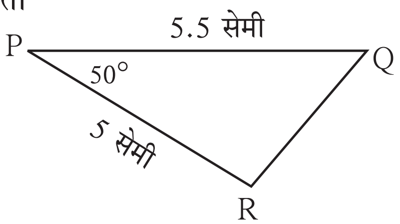
आकृती काढण्याच्या पायऱ्या

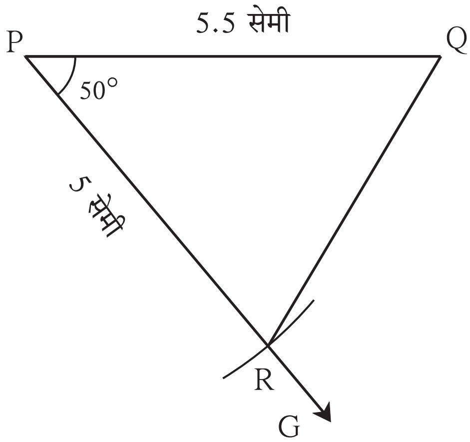
1. कच्च्या आकृतीप्रमाणे रेख PQ हा 5.5 सेमी लांबीचा पाया घेतला.
2. किरण PG असा काढला की $m\angle GPQ = 50^\circ$
3. कंपासमध्ये 5 सेमी अंतर घ्या. कंपासचे लोखंडी टोक P वर ठेवून किरण PG वर कंस काढला. त्या छेदनबिंदूला R नाव दिले. बिंदू Q व बिंदू R जोडा. ΔPQR हा अपेक्षित त्रिकोण तयार झाला.



किरण PG हा रेख PQ च्या दुसऱ्या बाजूला देखील काढता येतो.
आता कच्ची आकृती पुढीलप्रमाणे काढू.
त्यानुसार ΔPQR काढला.

कच्ची आकृती





⊙ खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.

1. ΔMAT मध्ये l(MA) = 5.2 सेमी, $m\angle A = 80°$, l(AT) = 6 सेमी
2. ΔNTS मध्ये $m\angle T = 40°$, l(NT) = l(TS) = 5 सेमी
3. ΔFUN मध्ये l(FU) = 5 सेमी, l(UN) = 4.6 सेमी, $m\angle U = 110°$
4. ΔPRS मध्ये l(RS) = 5.5 सेमी, l(RP) = 4.2 सेमी, $m\angle R = 90°$

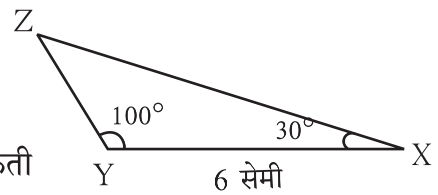
(III) दोन कोन आणि त्यांनी समाविष्ट केलेल्या बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढणे.

उदा. ΔXYZ असा काढा की l(YX) = 6 सेमी, $m\angle ZXY = 30°$, $m\angle XYZ = 100°$

$\angle XYZ$ हा विशालकोन आहे.

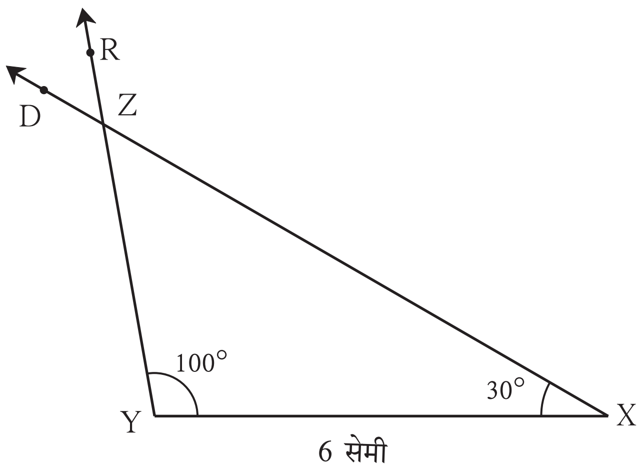
तसे कच्च्या आकृतीतही दाखवले आहे.

कच्ची आकृती



आकृती काढण्याच्या पायऱ्या

1. कच्च्या आकृतीप्रमाणे रेख YX हा 6 सेमी पाया घेतला.
2. किरण YR हा असा काढला की $m\angle XYR = 100°$
3. रेख XY च्या ज्या बाजूला बिंदू R आहे, त्याच बाजूला किरण XD असा काढला, की $m\angle YXD = 30°$. YR व XD या किरणांच्या छेदनबिंदूला Z नाव दिले. ΔXYZ हा अपेक्षित त्रिकोण तयार झाला.
4. पायाच्या दुसऱ्या बाजूला देखील असाच त्रिकोण काढता येतो हे अनुभवा.



जरा डोके चालवा.

उदा. ΔABC मध्ये $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 40°$ व l(AC) = 6 सेमी आहे. तर तुम्ही ΔABC काढू शकता का ? त्रिकोण काढण्यासाठी आणखी कोणती माहिती अपेक्षित आहे ? ती माहिती मिळवण्यासाठी कोणता गुणधर्म वापरता येईल ? कच्ची आकृती काढून ठरवा.

त्रिकोणातील तीनही कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म आठवा. हा गुणधर्म वापरून रेख AC ला समाविष्ट करणारे $\angle A$ व $\angle C$ यांची मापे मिळतील का ?

सरावसंच 4

⊙ खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.

1. ΔSAT, मध्ये $l(AT) = 6.4$ सेमी, $m\angle A = 45^\circ$, $m\angle T = 105^\circ$
2. ΔMNP, मध्ये $l(NP) = 5.2$ सेमी, $m\angle N = 70^\circ$, $m\angle P = 40^\circ$
3. ΔEFG, मध्ये $l(EG) = 6$ सेमी, $m\angle F = 65^\circ$, $m\angle G = 45^\circ$
4. ΔXYZ, मध्ये $l(XY) = 7.3$ सेमी, $m\angle X = 34^\circ$, $m\angle Y = 95^\circ$

(IV) कर्ण व एका बाजूची लांबी दिली असता काटकोन त्रिकोण काढणे.

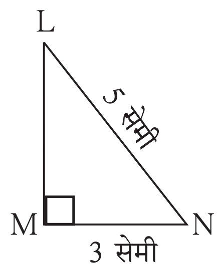
त्रिकोणात एक कोन काटकोन असेल तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो हे आपल्याला माहीत आहे. अशा त्रिकोणात **काटकोनासमोरील भुजा म्हणजे कर्ण** होय.

उदा. ΔLMN असा काढा की $m\angle LMN = 90^\circ$, कर्ण $= 5$ सेमी, $l(MN) = 3$ सेमी

दिलेल्या माहितीवरून, कच्ची आकृती काढा.

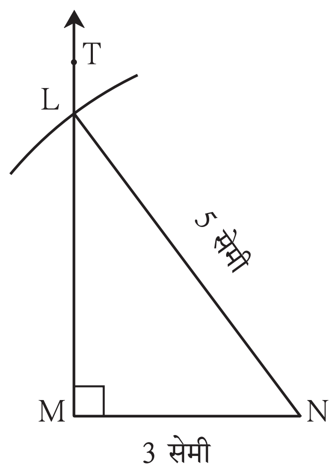
$m\angle LMN = 90^\circ$ म्हणून अंदाजे काटकोन त्रिकोण काढला व काटकोनाची खूण दाखवली आहे. म्हणजेच दिलेली माहिती कच्च्या आकृतीत दाखवली.

कच्ची आकृती



आकृती काढण्याच्या पायऱ्या

1. कच्च्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेख MN हा पाया 3 सेमी लांबीचा काढला.
2. रेख MN च्या बिंदू M पाशी 90° मापाचा कोन करणारा किरण MT काढला.
3. कंपासमध्ये 5 सेमी अंतर घेऊन कंपासचे लोखंडी टोक बिंदू N वर ठेवून किरण MT ला छेदणारा कंस काढला. छेदनबिंदूस L नाव दिले. ΔLMN तयार झाला.
4. पायाच्या दुसऱ्या बाजूला देखील अशीच आकृती काढता येते, हे लक्षात घ्या.



सरावसंच 5

खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.

1. ΔMAN, मध्ये $m\angle MAN = 90^\circ$, $l(AN) = 8$ सेमी, $l(MN) = 10$ सेमी.
2. काटकोन त्रिकोण STU मध्ये कर्ण SU $= 5$ सेमी व $l(ST) = 4$ सेमी.
3. ΔABC मध्ये $l(AC) = 7.5$ सेमी, $m\angle ABC = 90^\circ$, $l(BC) = 5.5$ सेमी.
4. ΔPQR मध्ये $l(PQ) = 4.5$ सेमी, $l(PR) = 11.7$ सेमी, $m\angle PQR = 90^\circ$.
5. विद्यार्थ्यांनी त्रिकोण रचनांसाठी वेगवेगळी उदाहरणे तयार करून सराव करावा.

कृती

पुढील माहितीप्रमाणे त्रिकोण काढण्याचा प्रयत्न करा.

1. ΔABC मध्ये $m\angle A = 85^\circ$, $m\angle B = 115^\circ$ $l(AB) = 5$ सेमी
2. ΔPQR मध्ये $l(QR) = 2$ सेमी, $l(PQ) = 4$ सेमी, $l(PR) = 2$ सेमी

वरील दोन्ही त्रिकोण तुम्ही काढू शकलात का ? काढू शकत नसाल तर त्यामागील कारण शोधा.

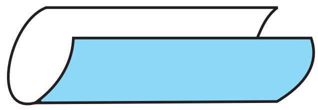
✸ अधिक माहितीसाठी कृती

उदा. ΔABC असा काढा की, $l(BC) = 8$ सेमी, $l(CA) = 6$ सेमी, $m\angle ABC = 40^\circ$. BC या 8 सेमी लांबीच्या पायावर 40° चा कोन करणारा किरण काढा. त्यावर $l(AC) = 6$ सेमी येईल असे A साठी दोन बिंदू मिळतात, हे कंपासच्या साहाय्याने अनुभवा. म्हणजेच दिलेल्या मापांचे दोन वेगळ्या आकारांचे त्रिकोण मिळतात. त्रिकोणाचे तीनही कोन दिले असतील व एकही बाजू दिली नसेल तर त्रिकोण काढता येईल का ? असे किती त्रिकोण काढता येतील ?

जाणून घेऊया.

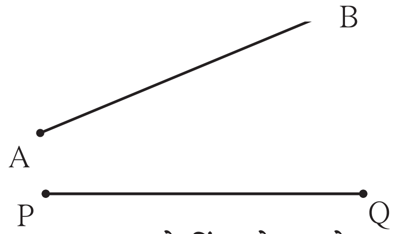
रेषाखंडांची एकरूपता (Congruence of segments)

कृती I एक आयताकृती कागद घ्या. या कागदाच्या समोरासमोरील बाजू जुळवा. त्या तंतोतंत जुळतात हे अनुभवा.



कृती II पट्टीच्या साहाय्याने रेख AB ची लांबी मोजा आणि रेख PQ ची लांबी मोजा व लिहा.

$l(AB) =$ .... $l(PQ) =$ ....



रेख AB व रेख PQ या रेषाखंडांची लांबी समान आहे ना ? त्या रेषा उचलून एकमेकींवर ठेवता येत नाहीत. एक पारदर्शक कागद AB वर ठेवून त्या कागदावर AB रेषाखंड बिंदूंच्या नावांसह गिरवा. पारदर्शक कागदावर मिळालेला नवा रेषाखंड PQ वर ठेवून तपासा. A बिंदू P वर ठेवल्यास B बिंदू Q वर पडू शकतो हे अनुभवा. यावरून रेख AB ही रेख PQ शी **एकरूप** आहे हे समजते.

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की दोन रेषाखंडांची लांबी समान असेल तर ते रेषाखंड तंतोतंत जुळतात म्हणजेच ते **एकरूप** आहेत, असे म्हणतात. रेषाखंड AB व रेषाखंड PQ हे एकरूप असतील तर ते रेख AB $\cong$ रेख PQ असे लिहितात.

हे मला समजले.

- जर दिलेल्या रेषाखंडांची लांबी समान असेल तर ते रेषाखंड एकरूप असतात.

❁ जर रेख AB $\cong$ रेख PQ म्हणजेच रेख PQ $\cong$ रेख AB.

❁ जर रेख AB $\cong$ रेख PQ, रेख PQ $\cong$ रेख MN तर रेख AB $\cong$ रेख MN हे लक्षात घ्या.

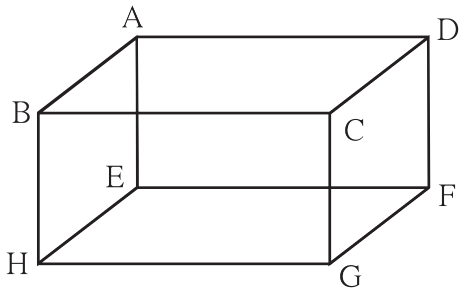
म्हणजेच एक रेषाखंड दुसऱ्याशी व दुसरा तिसऱ्याशी एकरूप असेल तर पहिला रेषाखंड तिसऱ्याशी देखील एकरूप असतो.

कृती I

कोणतेही एक खोके घ्या. त्याच्या प्रत्येक कडेची लांबी मोजा. कोणत्या कडा एकरूप आहेत ते पाहा.

कृती II

खाली दिलेल्या आकारावरून एकरूप रेषाखंडांच्या जोड्या लिहा.



(1) रेख AB ≅ रेख DC

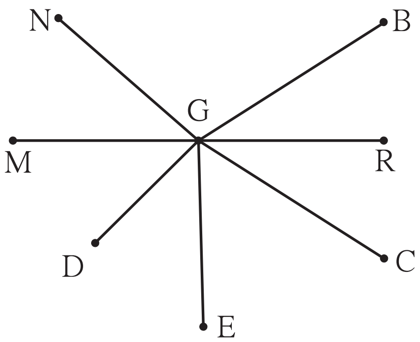
(2) रेख AE ≅ रेख BH

(3) रेख EF ≅ रेख ....

(4) रेख DF ≅ रेख ....

सरावसंच 6

1. खालील आकृतीमधील एकरूप रेषाखंडांच्या जोड्या लिहा. (कर्कटकाचा वापर करून त्या शोधा.)



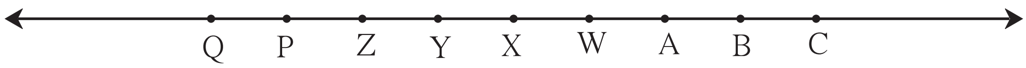
(i) ....

(ii) ....

(iii) ....

(iv) ....

2. खालील रेषेवर लगतच्या कोणत्याही दोन बिंदूंमध्ये समान अंतर आहे. त्यावरून रिकाम्या जागा भरा.



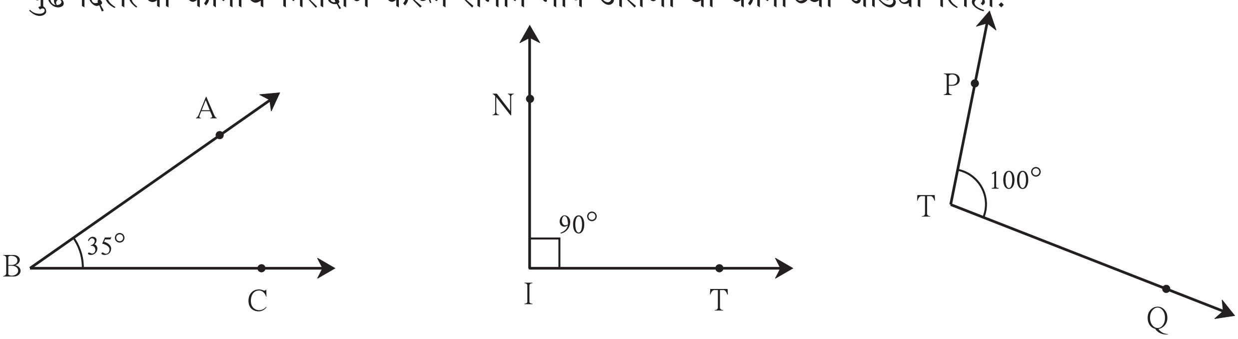
(i) रेख AB ≅ रेख .... (ii) रेख AP ≅ रेख .... (iii) रेख AC ≅ रेख ....

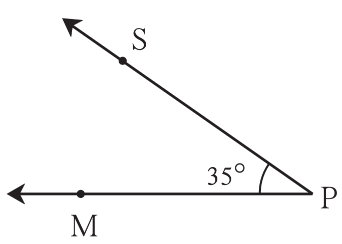
(iv) रेख .... ≅ रेख BY (v) रेख .... ≅ रेख YQ (vi) रेख BW ≅ रेख ....

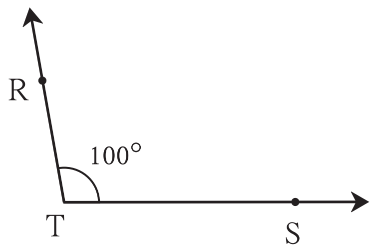
जाणून घेऊया.

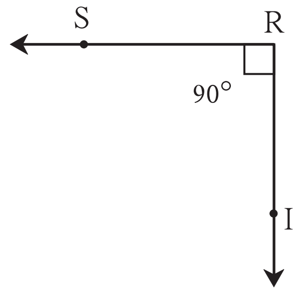
कोनांची एकरूपता (Congruence of angles)

पुढे दिलेल्या कोनांचे निरीक्षण करून समान मापे असणाऱ्या कोनांच्या जोड्या लिहा.

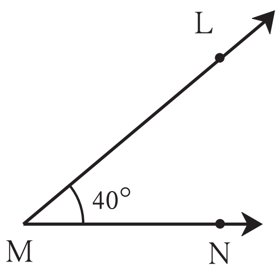


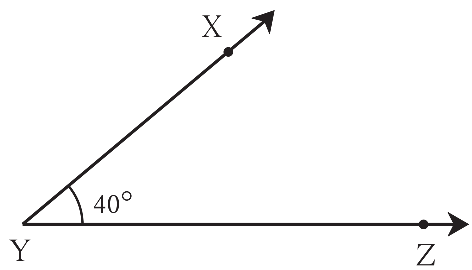






कृती





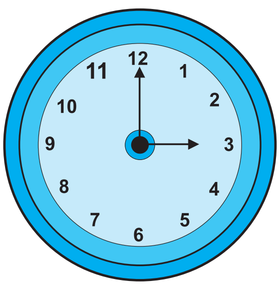
आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 40° चे $\angle LMN$ व $\angle XYZ$ हे दोन कोन काढा. एक पारदर्शक कागद $\angle LMN$ वर ठेवून बिंदूंच्या नावांसह कोनाच्या भुजा गिरवा. पारदर्शक कागद उचलून मिळालेला कोन $\angle XYZ$ वर ठेवा. बिंदू M बिंदू Y वर, किरण MN किरण YZ वर ठेवून किरण ML हा किरण YX वर पडतो हे अनुभवा. यावरून समान मापांचे कोन एकरूप असतात हे समजते. कोनांची एकरूपता भुजांच्या लांबीवर अवलंबून नसते. कोनांची एकरूपता कोनांच्या मापांवर अवलंबून असते. $\angle LMN$ व $\angle XYZ$ एकरूप आहेत हे
$\angle LMN \cong \angle XYZ$ असे लिहितात.

हे मला समजले.

- ज्या कोनांची मापे समान असतात, ते कोन एकरूप असतात.

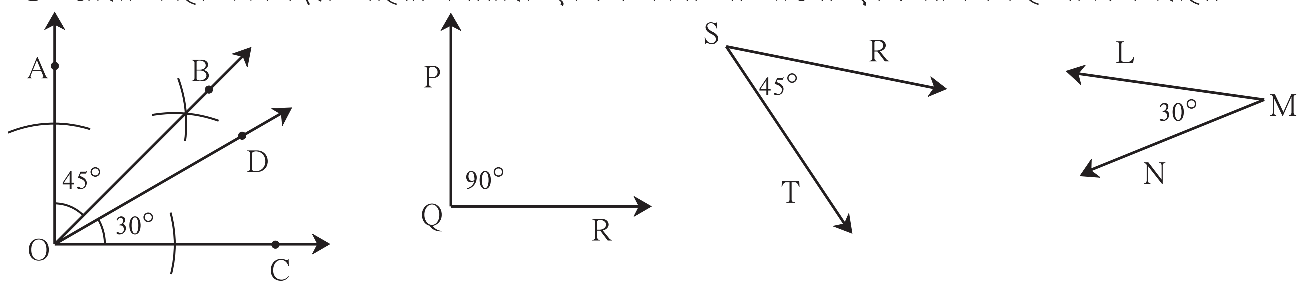
- जर $\angle LMN \cong \angle XYZ$ तर $\angle XYZ \cong \angle LMN$
- जर $\angle LMN \cong \angle ABC$ आणि $\angle ABC \cong \angle XYZ$ तर $\angle LMN \cong \angle XYZ$

चला, चर्चा करूया.



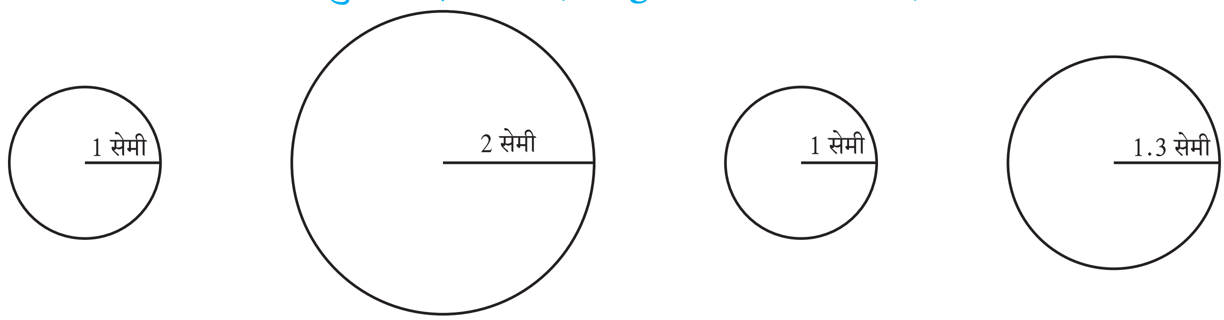
- घड्याळात किती वाजले आहेत ? ☐
- दोन काट्यांमध्ये किती अंश मापाचा कोन झाला आहे ? ☐
- या कोनाशी एकरूप कोन घड्याळाच्या काट्यांमध्ये आणखी किती वाजता असतो ? ☐

⊙ खाली काही कोन दिले आहेत. त्यांतील एकरूप कोनांच्या जोड्या एकरूपतेचे चिन्ह वापरून लिहा.



जाणून घेऊया.

वर्तुळांची एकरूपता (Congruence of circles)



(a) (b) (c) (d)

कृती I वरील आकृतीतील वर्तुळांचे निरीक्षण करा.

वरीलप्रमाणे 1 सेमी, 2 सेमी, 1 सेमी, 1.3 सेमी त्रिज्येची वर्तुळे कागदावर काढा व त्या वर्तुळाकार चकत्या कापा. या चकत्या एकमेकींवर ठेवून कोणत्या चकत्या एकमेकींशी तंतोतंत जुळतात हे तपासा.

निरीक्षणे : 1. आकृती (a) व (c) मधील वर्तुळे एकमेकांशी जुळणारी आहेत.

2. आकृती (b) व (c) मधील वर्तुळे तसेच, आकृती (a) व आकृती (d) मधील वर्तुळे एकमेकांशी जुळणारी नाहीत.

जी वर्तुळे एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात त्यांना **एकरूप वर्तुळे** म्हणतात.

कृती II वेगवेगळ्या आकारांच्या पण समान जाडीच्या बांगड्या आणून त्यातील कोणत्या बांगड्या एकरूप आहेत ते शोधा.

कृती III व्यवहारात तुम्हांला एकरूप वर्तुळे कोठे दिसतात ते शोधा.

कृती IV घरातील वर्तुळाकार कडा असलेल्या ताटल्या किंवा वाट्या घ्या. त्यांच्या कडा एकमेकींशी जुळवून कोणत्या कडा एकमेकींशी एकरूप आहेत ते पाहा.

हे मला समजले.

- ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात, ती वर्तुळे एकरूप असतात.

ICT Tools or Links

Geogebra Software मधील Construction tools चा वापर करून त्रिकोण व वर्तुळे काढा.

2 पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार व भागाकार

जरा आठवूया.

- मागील इयत्तेत आपण पूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी करायला शिकलो आहोत. त्याचा उपयोग करून खालील रिकाम्या जागा भरा.

(1) $5 + 7 = \boxed{}$ (2) $10 + (-5) = \boxed{}$ (3) $-4 + 3 = \boxed{}$

(4) $(-7) + (-2) = \boxed{}$ (5) $(+8) - (+3) = \boxed{}$ (6) $(+8) - (-3) = \boxed{}$

- खालील प्रत्येक क्रियेचे उत्तर 3 येईल अशा प्रकारे रिकाम्या कंसांत योग्य संख्या लिहा.

$(-6) + (\quad)$ $4 - (\quad)$ $7 + (\quad)$

3

$(-5) - (\quad)$ $-8 + (\quad)$ $9 - (\quad)$

जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार

मयूरी शाळेतून घरी जाताना तिची सायकल पंक्चर झाली. पंक्चर काढण्यासाठी तिच्याकडे पुरेसे पैसे नव्हते. तेव्हा तिला सुशांत, स्नेहल आणि कल्पनाने प्रत्येकी पाच रुपये उसने दिल्याने तिच्याजवळ 15 रुपये उसने गोळा झाले व तिच्या सायकलची दुरुस्ती झाली. आपण उसने रुपये किंवा कर्ज '–' (ऋण) चिन्हाने दाखवतो म्हणजे मयूरीवर 15 रुपयांचे कर्ज होते किंवा तिच्याजवळ -15 रुपये होते.

येथे आपण $(-5) + (-5) + (-5) = -15$ हे जाणून घेतले.

यावरून $(-5) \times 3 = 3 \times (-5) = -15$ हे ध्यानात येते.

दुसऱ्या दिवशी मयूरीने आईकडून 15 रुपये आणून प्रत्येकाचे पैसे परत केले व कर्ज फेडले किंवा कमी केले. कर्ज काढून टाकणे म्हणजे पैसे मिळवणे हे समजून $-(-15) = +15$ हे लक्षात घ्या.

आपण पूर्ण संख्यांचे गुणाकार व भागाकार शिकलो आहोत. या क्रिया करण्यासाठी पाढे देखील तयार केले आहेत. आता पूर्णांक संख्यांचे गुणाकार अभ्यासू म्हणजेच ऋण संख्या, धन संख्या व शून्य मिळून जो समूह आहे त्यातील संख्यांचे गुणाकार पाहू.

$(-3) + (-3) + (-3) + (-3)$ ही बेरीज म्हणजेच (-3) ही संख्या 4 वेळा घेऊन केलेली बेरीज होय. ती -12 येते. ही बेरीज आपण $(-3) \times 4 = -12$ अशी लिहू शकतो. त्याचप्रकारे $(-5) \times 6 = -30$, $(-7) \times 2 = -14$, $8 \times (-7) = -56$

आता (– 4) चा पाढा तयार करू.

$(-4) \times 0 = 0$
$(-4) \times 1 = -4$
$(-4) \times 2 = -8$
$(-4) \times 3 = -12$ ↓

यातील आकृतिबंधाचे निरीक्षण करा. येथे (– 4) चा गुणक एका एककाने वाढला की गुणाकार 4 ने कमी झालेला दिसतो.

हाच आकृतिबंध ठेवून (– 4) हा पाढा वरच्या बाजूला गुणक कमी करून वाढवला, तर तो असा होईल.

$(-4) \times (-2) = 8$ ↑
$(-4) \times (-1) = 4$
$(-4) \times 0 = 0$

(– 4) चा गुणक एका एककाने कमी झाला, की गुणाकार 4 ने वाढतो हे ध्यानात घ्या.

खालील सारणीत (– 5) चा पाढा दिला आहे. सारणीतील (– 6) व (– 7) चे पाढे पूर्ण करा.

$(-5) \times (-3) = 15$	$(-6) \times (-3) = \square$	$(-7) \times (-3) = \square$
$(-5) \times (-2) = 10$	$(-6) \times (-2) = \square$	$(-7) \times (-2) = \square$
$(-5) \times (-1) = 5$	$(-6) \times (-1) = \square$	$(-7) \times (-1) = \square$
$(-5) \times 0 = 0$	$(-6) \times 0 = \square$	$(-7) \times 0 = \square$
$(-5) \times 1 = -5$	$(-6) \times 1 = \square$	$(-7) \times 1 = \square$
$(-5) \times 2 = -10$	$(-6) \times 2 = \square$	$(-7) \times 2 = \square$
$(-5) \times 3 = -15$	$(-6) \times 3 = \square$	$(-7) \times 3 = \square$
$(-5) \times 4 = -20$	$(-6) \times 4 = \square$	$(-7) \times 4 = \square$

हे मला समजले.

- दोन धन पूर्णांकांचा गुणाकार धन पूर्णांक येतो.
- एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक यांचा गुणाकार ऋण पूर्णांक येतो.
- दोन ऋण पूर्णांकांचा गुणाकार धन पूर्णांक येतो.

(धन संख्या) × (धन संख्या) = (धन संख्या)
(धन संख्या) × (ऋण संख्या) = (ऋण संख्या)
(ऋण संख्या) × (धन संख्या) = (ऋण संख्या)
(ऋण संख्या) × (ऋण संख्या) = (धन संख्या)

सरावसंच 8

⊙ गुणाकार करा.

(i) $(-5) \times (-7)$ (ii) $(-9) \times (6)$ (iii) $(9) \times (-4)$ (iv) $(8) \times (-7)$

(v) $(-124) \times (-1)$ (vi) $(-12) \times (-7)$ (vii) $(-63) \times (-7)$ (viii) $(-7) \times (15)$

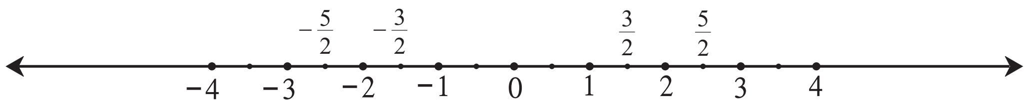
जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांचा भागाकार

एका धन पूर्णांकाला दुसऱ्या धन पूर्णांकाने भागण्याची क्रिया आपल्याला माहीत आहे. असा भागाकार पूर्ण संख्या किंवा अपूर्णांक असतो, हेही आपण जाणतो.

जसे, $6 \div 2 = \frac{6}{2} = 3$, $5 \div 3 = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

संख्यारेषेवर शून्याच्या डावीकडे आपण ऋण पूर्णांक संख्या दाखवू शकतो. त्याचप्रमाणे त्यांचे भागही दाखवू शकतो.



येथे $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ या संख्या, संख्यारेषेवर दाखवल्या आहेत.

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $\left(\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ या परस्पर विरुद्ध संख्यांच्या जोड्या आहेत हे ध्यानात घ्या.

म्हणजेच $\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0$, $\quad \frac{3}{2} + \frac{(-3)}{2} = 0$, $\quad -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0$

विरुद्ध संख्यांच्या जोडीला बेरीज व्यस्त संख्यांची जोडी असेही म्हणतात.

$(-1) \times (-1) = 1$ हे आपण पाहिले आहे. या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना (-1) ने भागले तर $(-1) = \frac{1}{(-1)}$ हे समीकरण मिळते. म्हणून $\frac{1}{(-1)}$ हा भागाकार म्हणजे (-1) आहे हे जाणून घ्या.

यावरून $6 \times (-1) = 6 \times \frac{1}{(-1)} = \frac{6}{(-1)}$ हे समजते.

धन पूर्णांकाला ऋण पूर्णांकाने भागणे

$$\frac{7}{-2} = \frac{7 \times 1}{(-1) \times 2} = 7 \times \frac{1}{(-1)} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{1} \times (-1) \times \frac{1}{2} = \frac{(7) \times (-1)}{2} = \frac{-7}{2}$$

ऋण पूर्णांकाला ऋण पूर्णांकाने भागणे

$$\frac{-13}{-2} = \frac{(-1) \times 13}{(-1) \times 2} = \frac{(-1)}{(-1)} \times 13 \times \frac{1}{2} = (-1) \times \frac{(-1)}{1} \times \frac{13}{2} = 1 \times \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$$

याचप्रमाणे $\frac{-25}{-4} = \frac{25}{4}$, $\qquad \frac{-18}{-2} = \frac{18}{2} = 9$ इत्यादी पडताळून पाहा.

यावरून ऋण पूर्णांकांचा भागाकार समजतो.

एका पूर्णांक संख्येला दुसऱ्या शून्येतर पूर्णांक संख्येने भागले की मिळणारा भागाकार लिहिताना छेद हा धन पूर्णांक संख्या असावा हा संकेत आहे, म्हणून $\frac{7}{-2} = \frac{-7}{2}$, $\frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}$ असे लिहितात.

हे मला समजले.

पूर्णांक संख्यांच्या भागाकाराचे नियम गुणाकाराच्या नियमांसारखे आहेत.

- दोन धन पूर्णांक संख्यांचा भागाकार, धन संख्या येते.
- दोन ऋण पूर्णांक संख्यांचा भागाकार, धन संख्या येते.
- धन पूर्णांक व ऋण पूर्णांक यांचा भागाकार, नेहमी ऋण संख्या येते.

सरावसंच 9

1. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) $(-96) \div 16$ (ii) $98 \div (-28)$ (iii) $(-51) \div 68$ (iv) $38 \div (-57)$

(v) $(-85) \div 20$ (vi) $(-150) \div (-25)$ (vii) $100 \div 60$ (viii) $9 \div (-54)$

(ix) $78 \div 65$ (x) $(-5) \div (-315)$

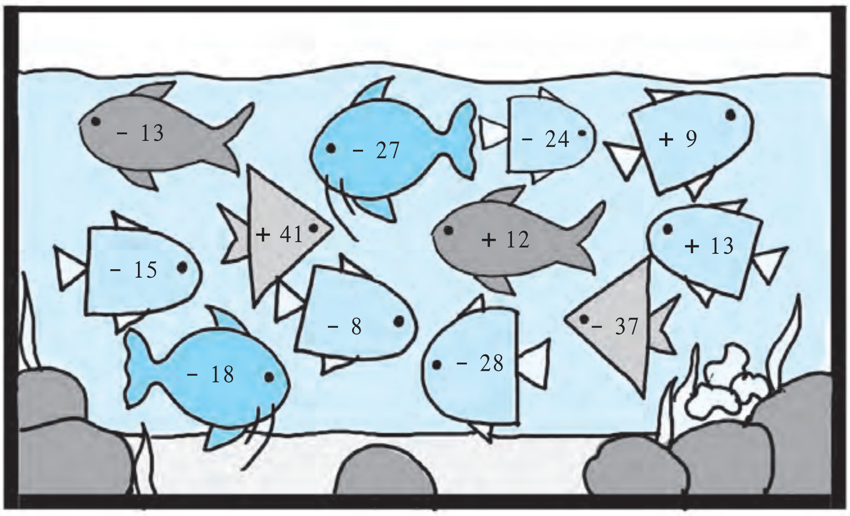
2*. ज्यांचे उत्तर $\frac{24}{5}$ येईल असे पूर्णांकांचे तीन भागाकार तयार करा.

3*. ज्यांचे उत्तर $\frac{-5}{7}$ येईल असे पूर्णांकांचे तीन भागाकार तयार करा.

4. खाली एका तलावात काही संख्या धारण केलेले मासे आहेत. कोणत्याही 4 जोड्या घेऊन त्यांतील संख्यांचे गुणाकार करा. तसेच चार वेगळ्या जोड्या घेऊन त्यांतील संख्यांचा भागाकार करा.

उदाहरणार्थ

1. $(-13) \times (-15) = 195$ 2. $(-24) \div 9 = \frac{-24}{9} = \frac{-8}{3}$



❑❑❑

3 मसावि-लसावि

3AC73A

जरा आठवूया.

- सर्वांत लहान मूळ संख्या (prime number) कोणती ?
- 1 ते 50 या संख्यांमध्ये किती मूळसंख्या आहेत ? त्यांची यादी करा.
- खालील संख्यांपैकी ज्या संख्या मूळसंख्या आहेत, त्या संख्यांभोवती वर्तुळ करा.

  17, 15, 4, 3, 1, 2, 12, 23, 27, 35, 41, 43, 58, 51, 72, 79, 91, 97

  सहमूळ संख्या (coprime numbers) : ज्या दोन संख्यांचा सामाईक विभाजक फक्त 1 हाच असतो, त्या संख्या एकमेकींच्या **सहमूळ संख्या** आहेत असे म्हणतात. सहमूळ संख्यांना **सापेक्ष मूळ संख्या** (relatively prime numbers) असेही म्हणतात.

जसे : 10 व 21 या संख्या सहमूळ संख्या आहेत. कारण 10 चे विभाजक : 1, 2, 5, 10 आणि 21 चे विभाजक 1, 3, 7, 21. या दोनही संख्यांच्या विभाजकांमध्ये 1 हा एकमेव सामाईक विभाजक आहे. (3, 8) ; (4, 9); (21, 22) ; (22, 23) ; (23, 24) या काही सहमूळ संख्या आहेत. दोन क्रमवार संख्या सहमूळ असतात याचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

जोडमूळ संख्या (Twin prime numbers)

ज्या दोन मूळ संख्यांतील फरक 2 आहे, त्या दोन मूळ संख्यांना जोडमूळ संख्या असे म्हणतात.
जसे : (3, 5) ; (5, 7) ; (11, 13) ; (29, 31) इत्यादी.

सरावसंच 10

1. जी संख्या मूळ नाही आणि संयुक्तही नाही, अशी संख्या कोणती आहे ?
2. पुढील जोड्यांपैकी सहमूळ संख्यांच्या जोड्या ओळखा.
   (i) 8, 14　　(ii) 4, 5　　(iii) 17, 19　　(iv) 27, 15
3. 25 ते 100 पर्यंतच्या सर्व मूळ संख्यांची यादी करा. त्या किती आहेत ते लिहा.
4. 51 ते 100 पर्यंतच्या सर्व जोडमूळ संख्या लिहा.
5. 1 ते 50 मधील सहमूळ संख्यांच्या 5 जोड्या लिहा.
6. मूळ संख्यांपैकी समसंख्या कोणत्या ?

जाणून घेऊया.

संख्येचे मूळ अवयव पाडणे (Prime factorisation of a number)

संख्यांचा लसावि व मसावि काढण्यासाठी युक्लिडचा एक सोपा व महत्त्वाचा नियम अनेकदा वापरला जातो. "**कोणतीही संयुक्त संख्या ही मूळ संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिता येते**" हा तो नियम आहे.

संख्यांचे मूळ अवयव कसे पाडायचे ते पाहू.

उदा. 24 ही संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहा.

मूळ अवयव काढण्याची पद्धत

उभी मांडणी

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

आडवी मांडणी

$24 = 2 \times 12$

$= 2 \times 2 \times 6$ ...12 चे अवयव पाडले आहेत.

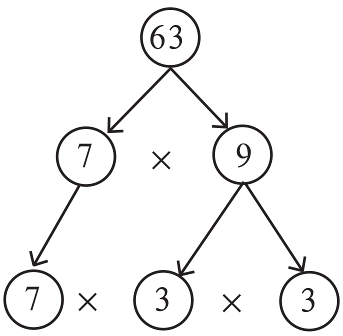
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ...6 चे अवयव पाडले आहेत.

2 व 3 हे मूळ अवयव आहेत.

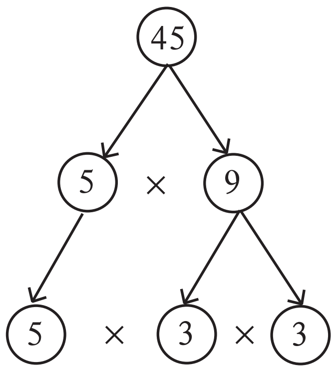
लक्षात ठेवा :

दिलेली संख्या तिच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिणे म्हणजे त्या संख्येचे मूळ अवयव पाडणे होय.

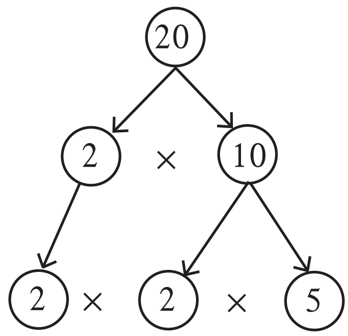
उदा. खाली दिलेल्या संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकार रूपात लिहा.



$63 = 7 \times 3 \times 3$



$45 = 5 \times 3 \times 3$



$20 = 2 \times 2 \times 5$

उदा. 117 चे मूळ अवयव पाडा.

3	117
3	39
13	13
	1

$117 = 13 \times 9$

$= 13 \times 3 \times 3$

$117 = 3 \times 3 \times 13$

उदा. 250 चे मूळ अवयव पाडा.

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$250 = 2 \times 125$

$= 2 \times 5 \times 25$

$= 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$

उदा. 40 चे मूळ अवयव पाडा.

उभी मांडणी

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

आडवी मांडणी

$$40 = 10 \times 4$$
$$= 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$40 = 8 \times 5$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

सरावसंच 11

⦿ खालील संख्यांचे मूळ अवयव पाडा.

(i) 32 (ii) 57 (iii) 23 (iv) 150 (v) 216

(vi) 208 (vii) 765 (viii) 342 (ix) 377 (x) 559

जरा आठवूया.

महत्तम सामाईक विभाजक (मसावि)

[Greatest Common Divisor, (GCD) or Highest Common Factor (HCF)]

आपण धन पूर्णांक संख्यांचे मसावि आणि लसावि अभ्यासले आहेत. आता त्यांचा आणखी थोडा अभ्यास करू. दिलेल्या संख्यांचा मसावि म्हणजे त्या संख्यांचा सर्वांत मोठा सामाईक विभाजक असतो.

- खालील प्रत्येक उदाहरणात संख्यांचे सर्व विभाजक लिहा व मसावि काढा.

  (i) 28, 42 (ii) 51, 27 (iii) 25, 15, 35

जाणून घेऊया.

मूळ अवयव पद्धती : मूळ अवयव पाडून संख्यांचा मसावि काढणे सोपे जाते.

उदा. मूळ अवयव पद्धतीने 24 व 32 यांचा मसावि काढा.

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$$24 = 4 \times 6$$
$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3$$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$32 = 8 \times 4$$
$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2$$

प्रत्येक संख्येमध्ये 2 हा सामाईक अवयव 3 वेळा येतो म्हणून मसावि $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदा. 195, 312 व 546 यांचा मसावि काढा.

$195 = 5 \times 39$
$= 5 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$312 = 4 \times 78$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 39$
$= 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$546 = 2 \times 273$
$= 2 \times 3 \times 91$
$= 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

प्रत्येक संख्येमध्ये 3 व 13 हे सामाईक अवयव एकेकदा आले आहेत.

$\therefore$ मसावि $= 3 \times 13 = 39$

उदा. 10, 15 व 12 यांचा मसावि काढा.

$10 = 2 \times 5$ $\quad$ $15 = 3 \times 5$ $\quad$ $12 = 2 \times 2 \times 3$

या संख्यांमध्ये कोणतीही मूळ संख्या सामाईक विभाजक नाही. 1 हा एकच सामाईक विभाजक आहे.

म्हणून मसावि $= 1$

उदा. 60, 12 व 36 यांचा मसावि काढा.

$60 = 4 \times 15$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

$12 = 2 \times 6$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3}$

$36 = 3 \times 12$
$= 3 \times 3 \times 4$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

हे उदाहरण उभ्या मांडणीने करू. एकाच वेळी सर्व संख्या लिहून मूळ अवयव काढू.

2	60	12	36
2	30	6	18
3	15	3	9
	5	1	3

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

लक्षात घ्या, की 12 हा 36 व 60 चा विभाजक आहे.

हे मला समजले.

- दिलेल्या संख्यांपैकी एक संख्या इतर संख्यांची विभाजक असेल तर ती संख्या त्या दिलेल्या संख्यांचा मसावि असते.
- दिलेल्या संख्यांसाठी एकही मूळ संख्या सामाईक अवयव नसेल, तर त्या संख्यांचा मसावि 1 असतो कारण 1 हा त्यांचा एकमेव सामाईक विभाजक असतो.

✻ **अधिक माहितीसाठी**

दोन क्रमागत सम संख्यांचा मसावि 2 असतो आणि दोन क्रमागत विषम संख्यांचा मसावि 1 असतो. हे नियम विविध उदाहरणे घेऊन पडताळून पाहा.

मसावि काढण्याची भागाकार पद्धत

उदा. 144 आणि 252 चा मसावि काढा.

```
144)252( 1
   -144
   108)144( 1
      -108
        36)108(3
          -108
           000
```

(1) मोठ्या संख्येला लहान संख्येने भागा.

(2) या भागाकारात मिळणाऱ्या बाकीने आधीच्या भाजकाला भागा.

(3) पायरी 2 मध्ये भागाकाराने मिळणाऱ्या बाकीने पायरी 2 मधील भाजकाला भागा व बाकी काढा.

(4) याप्रमाणे बाकी शून्य मिळेपर्यंत क्रिया करा.

ज्या भागाकारात बाकी शून्य मिळाली त्या भागाकारातील भाजक हा आधी दिलेल्या संख्यांचा मसावि आहे.

$\therefore$ 144 व 252 यांचा मसावि = 36

उदा. $\frac{209}{247}$ या संख्येला संक्षिप्त रूप द्या.

संक्षिप्त रूप देण्यासाठी दोन्ही संख्यांचा सामाईक अवयव शोधू. यासाठी 247 व 209 यांचा मसावि भागाकार पद्धतीने काढू.

येथे 19 हा मसावि आहे म्हणजे अंशस्थानी व छेदस्थानी असणाऱ्या संख्यांना 19 ने भाग जाईल.

$$\therefore \quad \frac{209}{247} = \frac{209 \div 19}{247 \div 19} = \frac{11}{13}$$

```
209)247 ( 1
   -209
    38)209 (5
      -190
        19)38(2
          -38
           00
```

सरावसंच 12

1. मसावि काढा.

(i) 25, 40 (ii) 56, 32 (iii) 40, 60, 75 (iv) 16, 27

(v) 18, 32, 48 (vi) 105, 154 (vii) 42, 45, 48 (viii) 57, 75, 102

(ix) 56, 57 (x) 777, 315, 588

2. भागाकार पद्धतीने मसावि काढा व संक्षिप्त रूप द्या.

(i) $\frac{275}{525}$ (ii) $\frac{76}{133}$ (iii) $\frac{161}{69}$

जरा आठवूया.

लघुतम सामाईक विभाज्य (लसावि) [Least common multiple (LCM)]

दिलेल्या संख्यांचा लसावि म्हणजे त्यांपैकी प्रत्येक संख्येने विभाज्य अशी लहानांत लहान संख्या असते.

- खाली दिलेल्या संख्यांचे पाढे लिहा व त्यांचे लसावि काढा.

(i) 6, 7 (ii) 8, 12 (iii) 5, 6, 15

जाणून घेऊया.

उदा. 60 व 48 यांचा लसावि काढा.

प्रत्येक संख्येचे मूळ अवयव पाहू.

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $\qquad\qquad$ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

वरील गुणाकारांत येणारी प्रत्येक मूळ संख्या पाहू.

2 ही संख्या जास्तीत जास्त 4 वेळा आली आहे. (48 च्या अवयवामध्ये)

3 ही संख्या जास्तीत जास्त 1 वेळा आली आहे. (60 च्या अवयवामध्ये)

5 ही संख्या जास्तीत जास्त 1 वेळा आली आहे. (60 च्या अवयवामध्ये)

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 10 \times 24 = 240$

उदा. 18, 30 व 50 यांचा लसावि काढूया.

$18 = 2 \times 9$	$30 = 2 \times 15$	$50 = 2 \times 25$
$= 2 \times 3 \times 3$	$= 2 \times 3 \times 5$	$= 2 \times 5 \times 5$

वर दिलेल्या गुणाकारात 2, 3 व 5 या मूळ संख्या येतात.

2 ही संख्या जास्तीत जास्त $\boxed{}$ वेळा, 3 ही संख्या जास्तीत जास्त $\boxed{}$ वेळा व 5 ही संख्या जास्तीत जास्त $\boxed{}$ वेळा आली आहे.

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 450$ $\qquad$ $\therefore$ 18, 30, 50 यांचा लसावि 450 आहे.

उदा. 16, 28 व 40 यांचा लसावि काढा.

उभी मांडणी

2	16	28	40
2	8	14	20
2	4	7	10
	2	7	5

- विभाज्यतेच्या कसोट्या वापरून सर्व संख्यांना भाग जाणाऱ्या संख्या शोधा व तिने दिलेल्या संख्यांना भागा. भागाकाराने मिळालेल्या संख्यांसाठी हीच क्रिया शक्य तेवढ्या वेळा करा.
- आता मिळालेल्या संख्यांपैकी कमीत कमी दोन संख्यांची विभाजक असलेली संख्या शोधून तिने ज्यांना भाग जातो त्या संख्यांना भागा. ज्या संख्येला भाग जात नाही, ती तशीच ठेवा. हीच क्रिया शक्य तेवढ्या वेळा करा.
- 1 शिवाय इतर कोणताही साधारण अवयव नसल्यास भागाकार थांबवा.
- डाव्या स्तंभातील संख्यांचा गुणाकार करा. त्याला सर्वांत खालच्या आडव्या ओळीतील संख्यांनी गुणा.

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$

उदा. 18 व 30 यांचा लसावि व मसावि काढा. त्यांचा गुणाकार व दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार यांची तुलना करा.

2	18	30
3	9	15
	3	5

मसावि $= 2 \times 3 = 6$

लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

मसावि $\times$ लसावि $= 6 \times 90 = 540$

दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार $= 18 \times 30 = 540$

दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार = मसावि $\times$ लसावि

यावरून असे दिसते की दोन संख्यांचा गुणाकार त्या दोन संख्यांचा मसावि व लसावि यांच्या गुणाकाराएवढा असतो. या विधानाचा पडताळा खालील संख्यांच्या जोड्यांसाठी घ्या.

(15, 48), (14, 63), (75, 120)

उदा . 15, 45 व 105 यांचा लसावि व मसावि काढा.

3	15	45	105
5	5	15	35
	1	3	7

$15 = \underline{3} \times \underline{5}$

$45 = \underline{3} \times 3 \times \underline{5}$

$105 = \underline{3} \times \underline{5} \times 7$

मसावि $= 3 \times 5 = 15$

लसावि $= 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

उदा. दोन अंकी दोन संख्यांचा गुणाकार 1280 आहे आणि त्यांचा मसावि 4 आहे, तर त्यांचा लसावि काढा.

मसावि × लसावि = दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार

4 × लसावि = 1280

∴ लसावि $= \dfrac{1280}{4} = 320$

सरावसंच 13

1. लसावि काढा.

   (i) 12, 15 (ii) 6, 8, 10 (iii) 18, 32 (iv) 10, 15, 20 (v) 45, 86
   (vi) 15, 30, 90 (vii) 105, 195 (viii) 12, 15, 45 (ix) 63, 81
   (x) 18, 36, 27

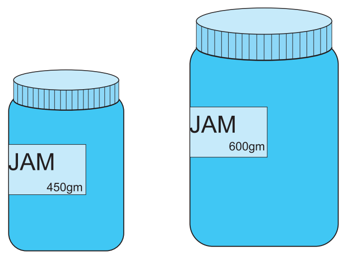
2. खाली दिलेल्या संख्यांचा मसावि आणि लसावि काढा. त्यांचा गुणाकार हा दिलेल्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराएवढा असतो याचा पडताळा घ्या.

   (i) 32, 37 (ii) 46, 51 (iii) 15, 60 (iv) 18, 63 (v) 78, 104

लसावि व मसावि यांचा उपयोग

उदा. दुकानात 450 ग्रॅम जॅमची लहान बाटली 96 रुपयांना आहे व त्याच जॅमची 600 ग्रॅम वजनाची मोठी बाटली 124 रुपयांना आहे, तर कोणती बाटली खरेदी करणे जास्त फायदेशीर आहे ?

उकल : आपण एकमान पद्धत शिकलो आहोत. त्याप्रमाणे प्रत्येक बाटलीतील 1 ग्रॅम जॅमची किंमत काढून तुलना करू शकतो. पण लहान सामाईक अवयव घेण्यापेक्षा मोठा सामाईक अवयव घेतल्यास आकडेमोड सोपी होते.



450 व 600 चा मसावि 150 आहे याचा वापर करू.

$450 = 150 \times 3$, $600 = 150 \times 4$

∴ लहान बाटलीतील 150 ग्रॅम जॅमची किंमत $\frac{96}{3}$ = 32 रुपये

मोठ्या बाटलीतील 150 ग्रॅम जॅमची किंमत $\frac{124}{4}$ = 31 रुपये

∴ 600 ग्रॅम जॅमची बाटली खरेदी करणे जास्त फायदेशीर आहे.

उदा. बेरीज करा. $\frac{17}{28} + \frac{11}{35}$ **रीत 1 :** बेरीज करण्यासाठी अपूर्णांकांचे छेद समान करू.

उकल : $\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times35+11\times28}{28\times35} = \frac{595+308}{28\times35} = \frac{903}{28\times35} = \frac{903}{980} = \frac{129}{140}$

रीत 2: बेरीज करण्यासाठी 28 व 35 यांचा लसावि काढू.

उकल : लसावि = 7 × 4 × 5 = 140

$\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times5}{28\times5} + \frac{11\times4}{35\times4} = \frac{85+44}{140} = \frac{129}{140}$

छेदांचा गुणाकार करण्याऐवजी लसावि घेतल्यामुळे आपली आकडेमोड किती सोपी झाली बरे !

उदा. एका संख्येला अनुक्रमे 8, 10, 12, 14 या संख्यांनी भागले असता प्रत्येक वेळी बाकी 3 उरते, तर अशी लहानांत लहान संख्या कोणती आहे ?

2	8	10	12	14
2	4	5	6	7
	2	5	3	7

उकल : भाज्य संख्या शोधण्यासाठी दिलेल्या भाजकांचा लसावि काढू.

लसावि = 2 × 2 × 2 × 5 × 3 × 7 = 840

त्या लसाविमध्ये प्रत्येक वेळी मिळणारी बाकी मिळवू.

ती संख्या = लसावि + बाकी = 840 + 3 = 843

उदा. 16,20,80 या संख्यांचा लसावि काढा.

4	16	20	80
4	4	5	20
5	1	5	5
	1	1	1

उकल : 16 = 2 × 2 × 2 × 2

20 = 2 × 2 × 5

80 = 2 × 2 × 2 × 2 × 5

लसावि = 4 × 4 × 5 = 80

येथे एक गंमत दिसली का ? 80 ही दिलेल्या संख्यांपैकी एक आहे आणि 16 व 20 या दिलेल्या इतर संख्या तिच्या विभाजक आहेत.

लक्षात ठेवा :

दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वांत मोठ्या संख्येच्या इतर संख्या विभाजक असतात त्या वेळी ती मोठी संख्या दिलेल्या संख्यांचा लसावि असते.

वरील नियम पडताळण्यासाठी (18,90) (35,140,70) हे संख्यासमूह तपासा.

उदा. श्रेयस, शलाका आणि स्नेहल एका वर्तुळाकार धावपट्टीच्या एका ठिकाणावरून एकाच वेळी पळण्यास सुरुवात करतात व अनुक्रमे 16, 24 व 18 मिनिटांत एक फेरी पूर्ण करतात, तर ते तिघेही कमीत कमी किती वेळानंतर सुरुवातीच्या ठिकाणावर एकाच वेळी येतील ?

उकल: ज्या वेळेनंतर ते एकत्र येतील, ती वेळ 16, 24, व 18 यांच्या पटीत असेल. ती कमीत कमी किती असेल ते शोधण्यासाठी लसावि काढू.

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $18 = 2 \times 3 \times 3$

लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

144 मिनिटांनी किंवा 2 तास 24 मिनिटांनी ते एकत्र येतील.

सरावसंच 14

1. योग्य पर्याय निवडा.

(i) 120 व 150 यांचा मसावि .... आहे.

(1) 30 (2) 45 (3) 20 (4) 120

(ii) खालीलपैकी .... या संख्यांचा मसावि 1 नाही.

(1) 13, 17 (2) 29, 20 (3) 40, 20 (4) 14, 15

2. मसावि व लसावि काढा.

(i) 14, 28 (ii) 32, 16 (iii) 17, 102, 170 (iv) 23, 69 (v) 21, 49, 84

3. लसावि काढा.

(i) 36, 42 (ii) 15, 25, 30 (iii) 18, 42, 48 (iv) 4, 12, 20 (v) 24, 40, 80, 120

4. एका संख्येला 8, 9, 10, 15, 20 या संख्यांनी भागले असता प्रत्येक वेळी 5 बाकी उरते, तर अशी लहानांत लहान संख्या लिहा.

5. $\frac{348}{319}, \frac{221}{247}, \frac{437}{551}$ या अपूर्णांकांना संक्षिप्त रूप द्या.

6. दोन संख्यांचा लसावि व मसावि अनुक्रमे 432 व 72 आहे. दोन संख्यांपैकी एक संख्या 216 असेल तर दुसरी संख्या काढा.

7. दोन अंकी दोन संख्यांचा गुणाकार 765 आहे आणि त्यांचा मसावि 3 आहे, तर त्यांचा लसावि काढा.

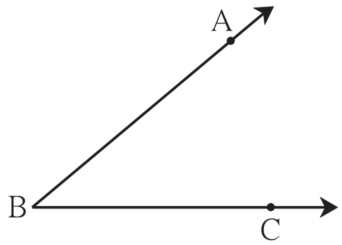
8. एका विक्रेत्याजवळ 392 मीटर, 308 मीटर, 490 मीटर लांबीच्या प्लॅस्टिकच्या दोऱ्यांची तीन गुंडाळी आहेत. दोरी उरणार नाही अशाप्रकारे त्या तीनही गुंडाळ्यांतील दोरीचे सारख्या लांबीचे तुकडे पाडले, तर प्रत्येक तुकडा जास्तीत जास्त किती लांबीचा झाला असेल ?

9*. दोन क्रमागत सम संख्यांचा लसावि 180 आहे, तर त्या संख्या कोणत्या ?

❑❑❑

4 कोन व कोनांच्या जोड्या

जरा आठवूया.

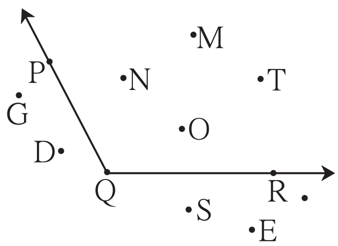


- शेजारील कोनाचे नाव लिहा. ....
- कोनाच्या शिरोबिंदूचे नाव लिहा. ....
- कोनाच्या'भुजांची नावे लिहा. ....
- भुजांवर दाखवलेल्या बिंदूंची नावे लिहा. ....

जाणून घेऊया.

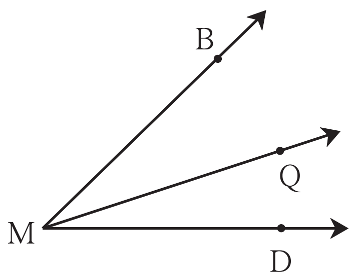
कोनाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग

शेजारील आकृतीमध्ये प्रतलातील कोनाच्या भुजांवरील बिंदूव्यतिरिक्त असलेले बिंदू N, बिंदू M, बिंदू T यांसारख्या बिंदूंचा समूह म्हणजे $\angle PQR$ चा **अंतर्भाग** होय. (Interior of an angle)



प्रतलातील जे बिंदू कोनाच्या भुजांवर नाहीत व कोनाच्या अंतर्भागात नाहीत अशा बिंदू G, बिंदू D, बिंदू E यांसारख्या बिंदूंचा समूह म्हणजे $\angle PQR$ चा **बाह्यभाग** होय. (Exterior of an angle)

संलग्न कोन (लगतचे कोन) (Adjacent angles)



शेजारच्या आकृतीतील कोन पाहा. $\angle BMQ$ व $\angle QMD$ या कोनांची किरण MQ ही एक भुजा सामाईक आहे आणि M हा शिरोबिंदू सामाईक आहे. या कोनांच्या अंतर्भागात एकही बिंदू सामाईक नाही. ते एकमेकांचे शेजारी आहेत. अशा कोनांना संलग्न कोन म्हणतात.

संलग्न कोनांची एक भुजा सामाईक असून उरलेल्या दोन भुजा सामाईक भुजेच्या विरुद्ध बाजूंना असतात आणि त्यांचा शिरोबिंदू सामाईक असतो. संलग्न कोनांचे अंतर्भाग विभिन्न असतात.

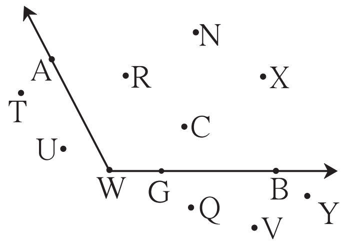
वरील आकृतीत $\angle BMD$ व $\angle BMQ$ या कोनांचीही MB ही भुजा सामाईक आहे. पण ते संलग्न कोन नाहीत, कारण त्यांचे अंतर्भाग विभिन्न नाहीत.

हे मला समजले.

- ज्या दोन कोनांचा शिरोबिंदू सामाईक असतो, एक भुजा सामाईक असते व त्यांचे अंतर्भाग विभिन्न असतात, त्या कोनांना संलग्न कोन म्हणतात.

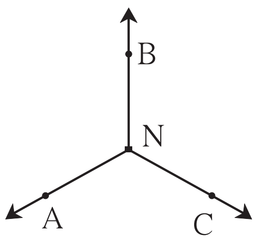
सरावसंच 15

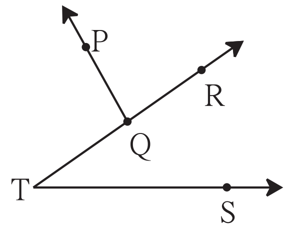
1. आकृतीचे निरीक्षण करा व $\angle AWB$ साठी पुढील सारणी पूर्ण करा.



अंतर्भागातील बिंदूंची नावे	
बाह्यभागातील बिंदूंची नावे	
कोनाच्या भुजांवरील बिंदूंची नावे	

2. खालील आकृत्यांमधील संलग्न कोनांच्या जोड्या लिहा.

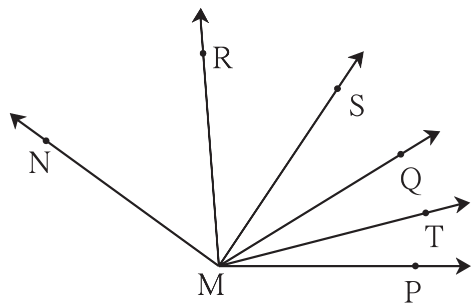




3. कोनांच्या खालील जोड्या संलग्न आहेत का ? संलग्न नसल्यास कारण लिहा.

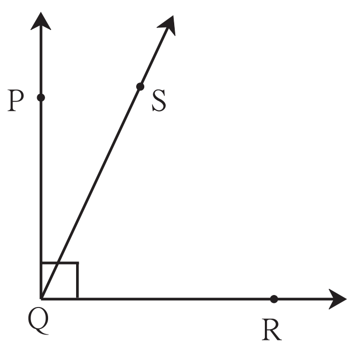
(i) $\angle PMQ$ व $\angle RMQ$ (ii) $\angle RMQ$ व $\angle SMR$

(iii) $\angle RMS$ व $\angle RMT$ (iv) $\angle SMT$ व $\angle RMS$



जाणून घेऊया.

कोटिकोन (Complementary angles)

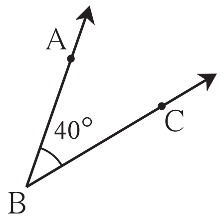


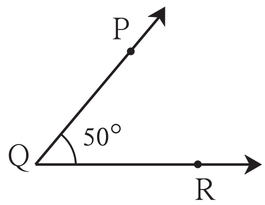
- $\angle PQR$ हा एक काटकोन काढा.
- त्याच्या अंतर्भागात S हा कोणताही बिंदू घ्या.
- किरण QS काढा.
- $\angle PQS$ व $\angle SQR$ यांच्या मापांची बेरीज करा.
- बेरीज किती येईल ?

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज $90°$ असते ते कोन परस्परांचे कोटिकोन आहेत, असे म्हणतात.

येथे $\angle PQS$ व $\angle SQR$ हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

उदा. आकृतीतील कोनांचे निरीक्षण करा व चौकटींत योग्य ती संख्या लिहा.





$m\angle ABC = \boxed{\quad}^\circ$

$m\angle PQR = \boxed{\quad}^\circ$

$m\angle ABC + m\angle PQR = \boxed{\quad}^\circ$

$\angle ABC$ व $\angle PQR$ यांच्या मापांची बेरीज 90° म्हणून ते परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

उदा. 70° मापाच्या कोनाच्या कोटिकोनाचे माप किती ?

उकल : दिलेल्या कोनाच्या कोटिकोनाचे माप x मानू.

$70 + x = 90$

$\therefore 70 + x - 70 = 90 - 70$

$x = 20^\circ$

70° मापाच्या कोटिकोनाचे माप 20° आहे.

उदा. $(a + 15)^\circ$ व $(2a)^\circ$ हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?

उकल : $a + 15 + 2a = 90$

$3a + 15 = 90$

$3a = 75$

$a = 25$

$\therefore a + 15 = 25 + 15 = 40^\circ$

आणि $2a = 2 \times 25 = 50^\circ$

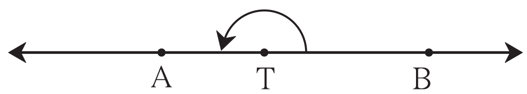
सरावसंच 16

1. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्यांच्या कोटिकोनांची मापे लिहा.

   (i) 40° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 55° (v) 20° (vi) 90° (vii) x°

2. $(y - 20)^\circ$ आणि $(y + 30)^\circ$ हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तर प्रत्येक कोनाचे माप काढा.

जरा आठवूया.

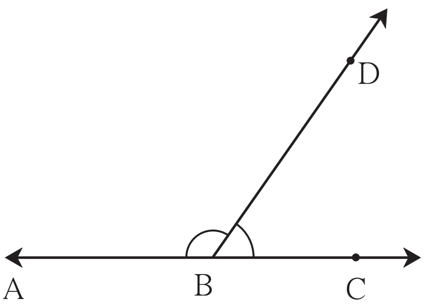


रेषा AB वर T हा एक बिंदू आहे.

- $\angle ATB$ या कोनाचा प्रकार कोणता ?
- त्याचे माप किती ?

जाणून घेऊया.

पूरक कोन (Supplementary angles)

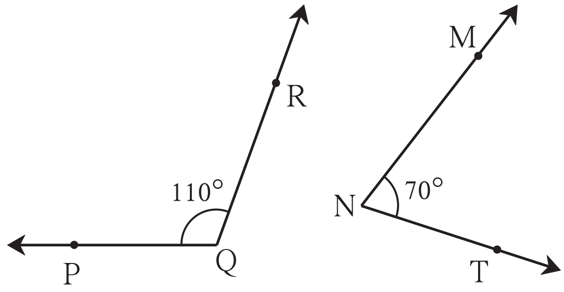


- शेजारील आकृतीत AC ही एक रेषा दिली आहे. रेषेवरील B बिंदूपासून BD हा किरण काढला आहे. येथे किती कोन आहेत ?
- $m\angle ABD = \boxed{\quad}^\circ$, $m\angle DBC = \boxed{\quad}^\circ$
- $m\angle ABD + m\angle DBC = \boxed{\quad}^\circ$

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, त्या दोन कोनांना परस्परांचे पूरक कोन असे म्हणतात.

येथे $\angle ABD$ व $\angle DBC$ हे परस्परांचे पूरक कोन आहेत.

उदा. खालील आकृतीतील कोनांचे निरीक्षण करा व चौकटींत योग्य ती संख्या लिहा.



- $m\angle PQR = \square^\circ$ $m\angle MNT = \square^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle MNT = \square^\circ$

$\angle PQR$ व $\angle MNT$ हे परस्परांचे पूरक कोन आहेत.

उदा. 135° मापाच्या पूरक कोनाचे माप काढा.

उकल : पूरक कोनाचे माप p° मानू.

पूरक कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

$135 + p = 180$

$\therefore\ 135 + p - 135 = 180 - 135$

$\therefore\quad p = 45$

$\therefore$ 135° मापाच्या पूरक कोनाचे माप 45° आहे.

उदा. $(a + 30)^\circ$ व $(2a)^\circ$ हे एकमेकांचे पूरक कोन आहेत तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?

उकल : $a + 30 + 2a = 180$

$\therefore 3a = 180 - 30$

$\therefore 3a = 150$

$\therefore a = 50$

$\therefore\ a + 30 = 50 + 30 = 80^\circ$

$\therefore\quad 2a = 2 \times 50 = 100^\circ$

$\therefore$ त्या कोनाची मापे 80° व 100° आहेत.

सरावसंच 17

1. खाली दिलेल्या कोनांच्या पूरक कोनांची मापे लिहा.

   (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) a°

2. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्यांतून जोड्या जुळवून पूरक कोनांच्या आणि कोटिकोनांच्या जोड्या तयार करा.

   $m\angle B = 60^\circ$ $m\angle N = 30^\circ$ $m\angle Y = 90^\circ$ $m\angle J = 150^\circ$

   $m\angle D = 75^\circ$ $m\angle E = 0^\circ$ $m\angle F = 15^\circ$ $m\angle G = 120^\circ$

3. ΔXYZ मध्ये $m\angle Y = 90^\circ$, $\angle X$ व $\angle Z$ या कोनांमधील परस्पर संबंध लिहा.
4. कोटिकोनांच्या जोडीतील कोनांच्या मापांतील फरक 40° असेल तर त्या कोनांची मापे काढा.
5. $\square$PTNM हा आयत आहे. या आकृतीतील पूरक कोनांच्या जोड्या लिहा.

6*. जर $m\angle A = 70^\circ$ तर $\angle A$ च्या कोटिकोनाच्या पूरक कोनाचे माप किती ?

7. $\angle A$ व $\angle B$ परस्परांचे पूरक कोन आहेत आणि $m\angle B = (x + 20)^\circ$, तर $m\angle A$ किती ?

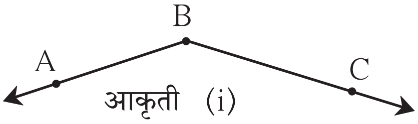
चला, चर्चा करूया.

खालील विधानांची चर्चा करा. विधान बरोबर असल्यास त्याचे उदाहरण द्या. विधान चूक असल्यास कारण सांगा.

- दोन लघुकोन परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- दोन काटकोन परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- एक लघुकोन व एक विशालकोन हे परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- दोन लघुकोन परस्परांचे पूरक कोन असू शकतात.
- दोन काटकोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.
- एक लघुकोन व एक विशालकोन परस्परांचे पूरक कोन असू शकतात.

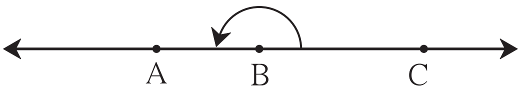
जाणून घेऊया.

विरुद्‌ध किरण (Opposite rays)



आकृती (i)

शेजारील आकृतीतील किरणांची नावे सांगा.
किरणांच्या आरंभबिंदूचे नाव सांगा.
आकृती (i) मधील कोनाचे नाव लिहा.



आकृती (ii)

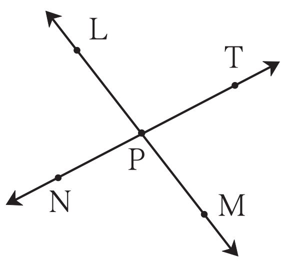
शेजारील आकृती (ii) मधील कोनाचे नाव लिहा.
आकृतीतील B हा आरंभबिंदू असलेल्या किरणांची नावे लिहा.

आकृती (i) मध्ये किरण BC व किरण BA मिळून एक विशालकोन होतो तर आकृती (ii) मध्ये किरण BC व किरण BA मिळून सरळकोन होतो व एक सरळ रेषा मिळते. येथे किरण BC व किरण BA हे एकमेकांचे विरुद्‌ध किरण आहेत.

हे मला समजले.

- ज्या दोन किरणांचा आरंभबिंदू सामाईक असतो व त्या किरणांनी एक रेषा तयार होते, त्या किरणांना परस्परांचे विरुद्‌ध किरण म्हणतात.

सरावसंच 18

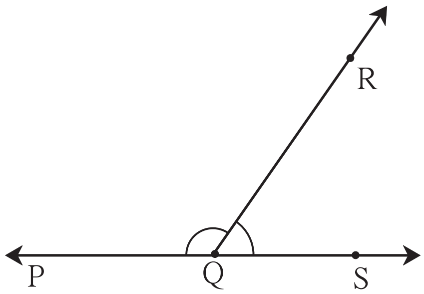


1. शेजारील आकृतीतील विरुद्‌ध किरणांची नावे लिहा.

2. किरण PM व किरण PT हे विरुद्‌ध किरण आहेत का ? सकारण लिहा.

जाणून घेऊया.

रेषीय जोडीतील कोन (Angles in linear pair)



- शेजारील आकृतीतील कोनांची नावे लिहा.
- कोनांची जोडी कोणत्या प्रकारची आहे ?
- कोनांच्या असामाईक भुजा कोणत्या आहेत ?
- $m\angle PQR = \boxed{}^\circ$
- $m\angle RQS = \boxed{}^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle RQS = 180^\circ$

आकृतीतील $\angle PQR$ व $\angle RQS$ हे संलग्न कोन आहेत तसेच ते पूरक कोन आहेत. त्यांच्या असामाईक भुजा हे परस्परांचे विरुद्ध किरण आहेत, म्हणजेच त्या भुजांनी एक रेषा तयार होते. हे दोन कोन रेषीय जोडीत आहेत असे म्हणतात. **रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.**

हे मला समजले.

- ज्या दोन कोनांची एक भुजा सामाईक असते व असामाईक भुजांनी सरळ रेषा तयार होते, त्यांना रेषीय जोडीतील कोन म्हणतात. रेषीय जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.

उपक्रम : स्ट्रॉ किंवा सरळ काड्या घेऊन अभ्यासलेल्या कोनांच्या जोड्या तयार करा.

सरावसंच 19

खाली दिलेल्या वर्णनाप्रमाणे कोनांच्या जोड्या काढा. काढता येत नसल्यास कारण लिहा.

(i) संलग्न नसलेले कोटिकोन

(ii) पूरक नसलेले रेषीय जोडीतील कोन

(iii) रेषीय जोडीत नसलेले पूरक कोन

(iv) रेषीय जोडीत नसलेले संलग्न कोन

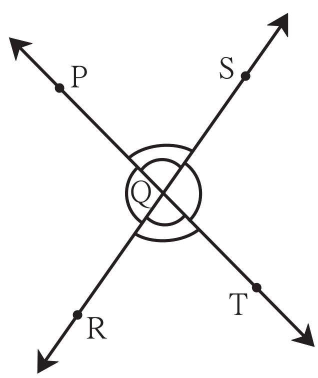
(v) जे कोटिकोनही नाहीत व संलग्न कोनही नाहीत

(vi) कोटिकोन असलेले रेषीय जोडीतील कोन

जाणून घेऊया.

विरुद्ध कोन (Vertically opposite angles)

शेजारील आकृतीत रेषा PT व रेषा RS या परस्परांना Q बिंदूत छेदतात. चार कोन तयार झाले आहेत. $\angle PQR$ हा किरण QP व किरण QR यांनी तयार झाला आहे. QP व QR या किरणांचे विरुद्ध किरण अनुक्रमे QT व QS आहेत. त्या विरुद्ध किरणांनी तयार झालेला कोन $\angle SQT$ आहे म्हणून $\angle SQT$ हा $\angle PQR$ चा विरुद्ध कोन आहे असे म्हणतात.



हे मला समजले.

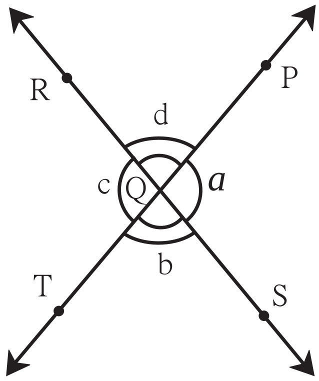
- ज्या दोन किरणांनी कोन तयार झाला, त्याच्या विरुद्ध किरणांनी तयार झालेला कोन पहिल्या कोनाचा विरुद्ध कोन असतो.

जाणून घेऊया.

विरुद्ध कोनांचा गुणधर्म

- दिलेल्या आकृतीतील $\angle PQS$ चा विरुद्ध कोन कोणता ?

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे $m\angle PQS = a$, $m\angle SQT = \mathrm{b}$, $m\angle TQR = \mathrm{c}$, $m\angle PQR = \mathrm{d}$ असे मानू.



$\angle PQS$ व $\angle SQT$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore a + \mathrm{b} = 180^\circ$

तसेच $m\angle SQT$ व $m\angle TQR$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore \mathrm{b} + \mathrm{c} = 180^\circ$

$\therefore a + \mathrm{b} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$

$\therefore a = \mathrm{c}$ . . . . (दोन्ही बाजूंमधून b वजा करून)

$\therefore$ $\angle PQS$ व $\angle TQR$ यांची मापे समान आहेत म्हणजेच ते कोन एकरूप आहेत.

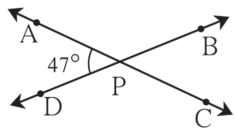
त्याचप्रमाणे $m\angle PQR = m\angle SQT$ म्हणजेच $\angle PQR$ व $\angle SQT$ एकरूप आहेत.

हे मला समजले.

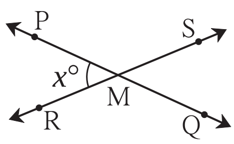
- दोन रेषांनी एकमेकींना छेदले असता होणाऱ्या परस्पर विरुद्ध कोनांची मापे समान असतात.

सरावसंच 20

1. रेषा AC व रेषा BD परस्परांना P या बिंदूत छेदतात. $m\angle APD = 47^\circ$ $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$ यांची मापे लिहा.

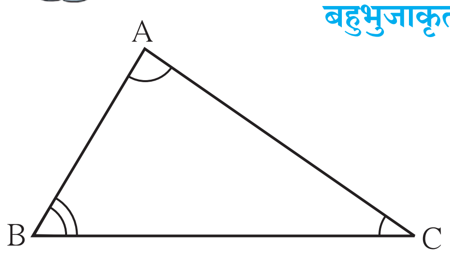


2. रेषा PQ व रेषा RS परस्परांना M बिंदूत छेदतात. $m\angle PMR = x^\circ$ $\angle PMS$, $\angle SMQ$ व $\angle QMR$ यांची मापे लिहा.



जाणून घेऊया.

बहुभुजाकृतीचे आंतरकोन (Interior angles of a polygon)

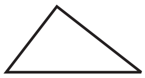
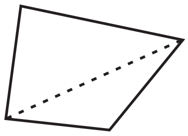
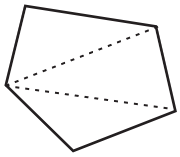
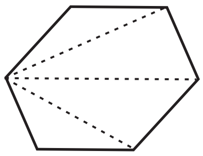
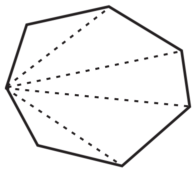


त्रिकोणाचे आंतरकोन

ΔABC चे $\angle A$, $\angle B$ व $\angle C$ हे आंतरकोन आहेत.

- $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \boxed{}^\circ$

खालील सारणीचे निरीक्षण करा व निष्कर्ष काढा.

बाजूंची संख्या	बहुभुजाकृतीचे नाव	बहुभुजाकृती	त्रिकोणांची संख्या	आंतरकोनांची बेरीज
3	त्रिकोण		1	$180^\circ \times 1 = \boxed{\quad}$
4	चौकोन		2	$180^\circ \times 2 = \boxed{\quad}$
5	पंचकोन		3	$180^\circ \times 3 = \boxed{\quad}$
6	षट्कोन		4	$180^\circ \times \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$
7	सप्तकोन		5	
8	अष्टकोन		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n बाजू असलेली आकृती		(n - 2)	$180^\circ \times (n - 2)$

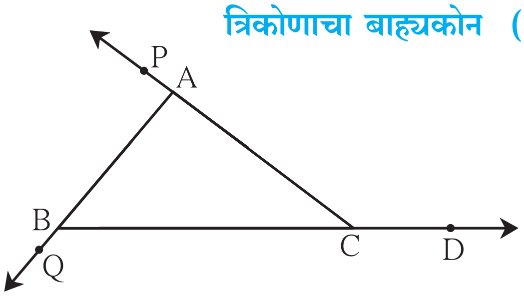
लक्षात घ्या की, बहुभुजाकृतीत वरीलप्रमाणे तयार झालेल्या त्रिकोणांची संख्या ही त्या बहुभुजाकृतीच्या बाजूंच्या संख्येपेक्षा दोनने कमी असते.

हे मला समजले.

- n बाजू असलेल्या बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांच्या मापांची बेरीज = $180^\circ \times (n - 2)$

जाणून घेऊया.

त्रिकोणाचा बाह्यकोन (Exterior angle of a triangle)



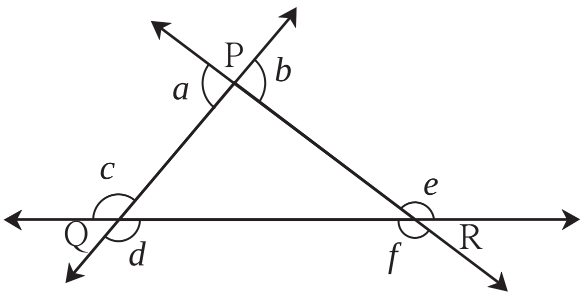
ΔABC ची बाजू BC आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वाढवली, तर $\angle$ACD हा नवा कोन त्रिकोणाबाहेर तयार होतो.

$\angle$ACD हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle$ACD व $\angle$ACB ही रेषीय जोडीतील कोनांची जोडी आहे. $\angle$PAB व $\angle$QBC हेही ΔABC चे बाह्यकोन आहेत.

हे मला समजले.

- त्रिकोणाची एक बाजू वाढवल्यावर जो कोन त्रिकोणाच्या लगतच्या आंतरकोनाशी रेषीय जोडी करतो, त्या कोनाला त्रिकोणाचा बाह्यकोन म्हणतात.

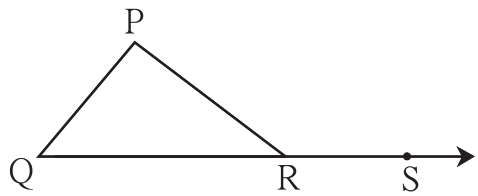
उदा. शेजारील आकृतीमध्ये त्रिकोणाचे बाह्यकोन दाखवले आहेत. a, b, c, d, e, f हे ΔPQR चे बाह्यकोन आहेत. प्रत्येक त्रिकोणाला याप्रमाणे सहा बाह्यकोन असतात.



जाणून घेऊया.

बाह्यकोनाचा गुणधर्म

शेजारील आकृतीत $\angle$PRS हा ΔPQR चा एक बाह्यकोन आहे. $\angle$PRQ हा त्याचा लगतचा आंतरकोन आहे. इतर दोन आंतरकोन म्हणजे $\angle$P व $\angle$Q हे $\angle$PRS पासून लांब म्हणजेच दूर आहेत. $\angle$P व $\angle$Q यांना $\angle$PRS चे दूरस्थ आंतरकोन म्हणतात.



$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \boxed{\quad}^\circ$ ....(त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज)

$m\angle PRS + m\angle PRQ = \boxed{\quad}^\circ$ ....(रेषीय जोडीतील कोन)

$\therefore\ m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$

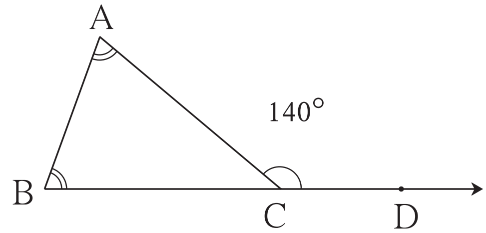
$\therefore\ m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$ ($m\angle$PRQ दोन्ही बाजूंतून वजा करून)

हे मला समजले.

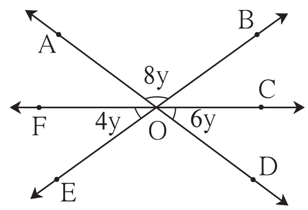
- त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्या कोनाच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे असते.

सरावसंच 21

1. $\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे समान आहेत. जर $m\angle ACD = 140^\circ$ तर $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे काढा.



2. शेजारील आकृतीतील कोनांची मापे पाहून त्यावरून उरलेल्या तीनही कोनांची मापे लिहा.



3*. ΔABC या समद्विभुज त्रिकोणात $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे समान आहेत. $\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle ACB$ व $\angle ACD$ ची मापे अनुक्रमे $(3x - 17)^\circ$ व $(8x + 10)^\circ$ आहेत, तर $\angle ACB$ व $\angle ACD$ यांची मापे काढा. तसेच $\angle A$ व $\angle B$ यांचीही मापे काढा.

ICT Tools or Links

- Geogebra च्या साहाय्याने एकच आरंभबिंदू असणारे दोन किरण काढा. Move Option चा उपयोग करून किरणाचे भ्रमण करा. एका विशिष्ट स्थितीत ते विरुद्ध किरण तयार होतात याचा पडताळा घ्या.
- रेषीय जोडीचे कोन तयार करा. सामाईक भुजा move करून वेगवेगळ्या रेषीय जोडीतील कोनांच्या जोड्या अनुभवा.
- Geogebra मधील Polygon Tools चा उपयोग करून विविध बहुभुजाकृती काढा व त्यांच्या आंतरकोनांच्या मापांच्या गुणधर्माचा पडताळा घ्या.

5 परिमेय संख्या व त्यांवरील क्रिया

3AUY6K

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्या (Rational numbers)

मागील इयत्तांमध्ये आपण 1, 2, 3, 4, ... या मोजसंख्या म्हणजेच नैसर्गिक संख्या अभ्यासल्या आहेत. नैसर्गिक संख्या, शून्य आणि नैसर्गिक संख्यांच्या विरुद्ध संख्या मिळून तयार झालेला पूर्णांक संख्या समूह आपल्याला माहीत आहे. तसेच $\frac{7}{11}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$ असे अपूर्णांकही आपल्याला परिचित आहेत. पूर्णांक संख्या व अपूर्णांक संख्या अशा सर्व संख्यांना सामावणारा एखादा संख्या समूह आहे का ? याचा विचार करू.

$4 = \frac{12}{3}$, $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{2}$ याप्रमाणे सर्व पूर्णांक संख्या आपल्याला $\frac{m}{n}$ या रूपात लिहिता येतात हे आपल्याला माहीत आहे. जर m हा कोणताही पूर्णांक आणि n हा कोणताही शून्येतर पूर्णांक असेल तर $\frac{m}{n}$ या संख्येला परिमेय संख्या म्हणतात. अशा परिमेय संख्यांचा समूह वरील सर्व प्रकारच्या संख्यांना सामावून घेतो.

परिमेय संख्या $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{-17}{28}$, 2.17 इ.

पूर्णांक संख्या – 3, – 8, – 1 इ.

पूर्ण संख्या 0

नैसर्गिक संख्या

1, 2, 3, ...

खालील सारणी पूर्ण करा.

	-3	$\frac{3}{5}$	-17	$-\frac{5}{11}$	5
नैसर्गिक संख्या	×				✓
पूर्णांक संख्या	✓				
परिमेय संख्या	✓				

परिमेय संख्यांवरील क्रिया

परिमेय संख्या या अंश व छेद वापरून व्यवहारी अपूर्णांकाच्या रूपांत लिहिल्या जातात म्हणून परिमेय संख्यांवरील क्रिया या अपूर्णांकांवरील क्रियांप्रमाणे करतात.

(1) $\frac{5}{7} + \frac{9}{11} = \frac{55+63}{77} = \frac{118}{77}$

(2) $\frac{1}{7} - \frac{3}{4} = \frac{4-21}{28} = \frac{-17}{28}$

(3) $2\frac{1}{7} + 3\frac{8}{14} = \frac{15}{7} + \frac{50}{14}$

$= \frac{30}{14} + \frac{50}{14}$

$= \frac{80}{14} = \frac{40}{7}$

(4) $\frac{9}{13} \times \frac{4}{7} = \frac{9\times4}{13\times7} = \frac{36}{91}$

(5) $\frac{3}{5} \times \frac{(-4)}{5} = \frac{3\times(-4)}{5\times5} = \frac{-12}{25}$

(6) $\frac{9}{13} \times \frac{26}{3} = \frac{3\times2}{1} = \frac{6}{1}$

जरा आठवूया.

एखाद्या संख्येला दुसऱ्या संख्येने भागणे म्हणजे या संख्येला दुसऱ्या संख्येच्या गुणाकार व्यस्ताने गुणणे.

आपण पाहिले आहे की, $\frac{5}{6}$ व $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{11}$ व $\frac{11}{2}$ या गुणाकार व्यस्त संख्यांच्या जोड्या आहेत.

तसेच, $\left(\frac{-5}{4}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right) = 1$; $\left(\frac{-7}{2}\right) \times \left(\frac{-2}{7}\right) = 1$ यावरून $\left(\frac{-5}{4}\right)$ व $\left(\frac{-4}{5}\right)$ आणि $\left(\frac{-7}{2}\right)$ व $\left(\frac{-2}{7}\right)$ या गुणाकार व्यस्त संख्यांच्या जोड्या आहेत. म्हणजेच $\frac{-5}{4}$ व $\frac{-4}{5}$ हे एकमेकांचे गुणाकार व्यस्त आहेत आणि $\frac{-7}{2}$ व $\frac{-2}{7}$ हेही परस्परांचे गुणाकार व्यस्त आहेत.

सांभाळा बरे!

उदा. $\frac{-11}{9}$ व $\frac{9}{11}$ यांचा गुणाकार -1 आहे म्हणून $\frac{-11}{9}$, $\frac{9}{11}$ ही गुणाकार व्यस्तांची जोडी **नाही**.

चला, चर्चा करूया.

आपण विविध संख्या समूहांची विशेषता पाहू. त्यासाठी गटात चर्चा करत पुढील सारणी पूर्ण करा. नैसर्गिक संख्या समूह, पूर्णांक संख्या समूह आणि परिमेय संख्या समूह विचारात घेऊ. या प्रत्येक संख्या समूहासमोर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया केल्यामुळे मिळणारे निष्कर्ष (✓) किंवा (×) या खुणेने दाखवा. शून्याने भागाकार करता येत नाही हे ध्यानात घ्या.

- नैसर्गिक संख्यांची बेरीज केली तर उत्तर नेहमी नैसर्गिक संख्याच मिळते, म्हणून नैसर्गिक संख्या समूहाच्या पुढे बेरीज या चौकटीखाली (✓) अशी खूण करा.
- दोन नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी केली तर उत्तर नेहमी नैसर्गिक संख्या येते असे नाही.
  कारण $7 - 10 = -3$ अशी असंख्य उदाहरणे आहेत, म्हणून वजाबाकीच्या चौकटीखाली (×) अशी खूण करा. सारणीत (×) ही खूण आल्यास त्याचे कारण स्पष्ट करा. सोदाहरण (×) चे कारण देताना, असंख्य उदाहरणांपैकी एक पुरेसे आहे.

संख्या समूह	बेरीज	वजाबाकी	गुणाकार	भागाकार
नैसर्गिक संख्या	✓	× ($7 - 10 = -3$)	✓	× ($3 \div 5 = \frac{3}{5}$)
पूर्णांक संख्या				
परिमेय संख्या				

हे मला समजले.

- नैसर्गिक संख्या समूह हा बेरीज व गुणाकार या क्रियांसाठी पुरेसा आहे, पण वजाबाकी व भागाकार या क्रियांसाठी पुरेसा नाही, म्हणजेच दोन नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी व भागाकार नैसर्गिक संख्या असेलच असे नाही.
- पूर्णांक संख्या समूह बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार या क्रियांसाठी पुरेसा आहे, पण भागाकार या क्रियेसाठी पुरेसा नाही.
- परिमेय संख्या समूह हा बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या सर्व क्रियांसाठी पुरेसा आहे. मात्र शून्याने भागता येत नाही.

सरावसंच 22

1. खालील परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

(i) $\frac{5}{36}+\frac{6}{42}$ (ii) $1\frac{2}{3}+2\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{11}{17}+\frac{13}{19}$ (iv) $2\frac{3}{11}+1\frac{3}{77}$

2. खालील परिमेय संख्यांची वजाबाकी करा.

(i) $\frac{7}{11}-\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{13}{36}-\frac{2}{40}$ (iii) $1\frac{2}{3}-3\frac{5}{6}$ (iv) $4\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}$

3. खालील परिमेय संख्यांचा गुणाकार करा.

(i) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{12}{5}\times\frac{4}{15}$ (iii) $\frac{(-8)}{9}\times\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{0}{6}\times\frac{3}{4}$

4. गुणाकार व्यस्त संख्या लिहा.

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{8}$ (iii) $\frac{-17}{39}$ (iv) 7 (v) $-7\frac{1}{3}$

5. खालील परिमेय संख्यांचा भागाकार करा.

(i) $\frac{40}{12}\div\frac{10}{4}$ (ii) $\frac{-10}{11}\div\frac{-11}{10}$ (iii) $\frac{-7}{8}\div\frac{-3}{6}$ (iv) $\frac{2}{3}\div(-4)$

(v) $2\frac{1}{5}\div5\frac{3}{6}$ (vi) $\frac{-5}{13}\div\frac{7}{26}$ (vii) $\frac{9}{11}\div(-8)$ (viii) $5\div\frac{2}{5}$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांच्या दरम्यानच्या संख्या

- 2 ते 9 या नैसर्गिक संख्यांच्या दरम्यान किती नैसर्गिक संख्या आहेत ? त्या लिहा.
- -4 ते 5 यांच्या दरम्यान कोणत्या पूर्णांक संख्या आहेत ? त्या लिहा.
- $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{4}$ यांच्या दरम्यान कोणत्या परिमेय संख्या असतील ?

उदा. $\frac{1}{2}$ व $\frac{4}{7}$ या परिमेय संख्यांच्या दरम्यानच्या परिमेय संख्या शोधू. त्यासाठी या संख्यांना समच्छेद रूप देऊ.

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times7}{2\times7} = \frac{7}{14}, \qquad \frac{4}{7} = \frac{4\times2}{7\times2} = \frac{8}{14}$$

7 व 8 या लगतच्या नैसर्गिक संख्या आहेत. परंतु $\frac{7}{14}$ व $\frac{8}{14}$ या लगतच्या परिमेय संख्या आहेत का ? कोणत्याही परिमेय संख्येचा छेद मोठा करता येतो. त्याच पटीत त्याचा अंशही मोठा होतो.

$$\frac{7}{14} = \frac{70}{140}, \qquad \frac{8}{14} = \frac{80}{140}$$ . . . (अंशाला व छेदाला 10 ने गुणून)

आता $\frac{70}{140} < \frac{71}{140} \ldots\ldots < \frac{79}{140} < \frac{80}{140}$ येथे $\frac{7}{14}$ व $\frac{8}{14}$ च्या दरम्यान किती संख्या मिळाल्या ?

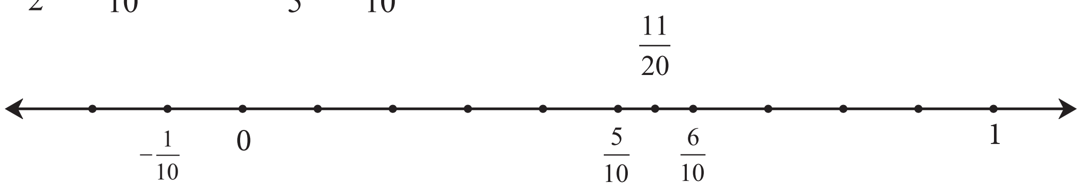
तसेच $\frac{7}{14} = \frac{700}{1400}$, $\frac{8}{14} = \frac{800}{1400}$ . . . (अंशाला व छेदाला 100 ने गुणून)

म्हणून $\frac{700}{1400} < \frac{701}{1400} \ldots\ldots < \frac{799}{1400} < \frac{800}{1400}$

यावरून परिमेय संख्यांचे रूपांतर अधिकाधिक मोठे छेद असणाऱ्या सममूल्य संख्यांमध्ये केले की, त्यांच्या दरम्यानच्या अधिकाधिक परिमेय संख्या व्यक्त करता येतात.

उदा. $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{5}$ या परिमेय संख्यांच्या दरम्यानच्या संख्या शोधणे. $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{5}$ या परिमेय संख्यांना प्रथम समच्छेद रूप देऊ.

जसे $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$



संख्यारेषेवर $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$ या संख्या दर्शवणारे बिंदू आहेत. त्यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू शोधू व तो बिंदू जी संख्या दाखवतो ती पाहू.

$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\right) = \frac{11}{20}$ आता हा बिंदू त्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू आहे.

कारण, $\frac{6}{10} - \frac{11}{20} = \frac{12-11}{20} = \frac{1}{20}$ तसेच $\frac{11}{20} - \frac{5}{10} = \frac{11-10}{20} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ $\frac{5}{10}$ व $\frac{6}{10}$ यांच्या दरम्यान बरोबर मध्यावर $\frac{11}{20}$ ही संख्या आहे. म्हणजेच $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{5}$ यांच्या दरम्यान $\frac{11}{20}$ ही संख्या आहे. याच रीतीने $\frac{1}{2}$ व $\frac{11}{20}$ आणि $\frac{11}{20}$ व $\frac{3}{5}$ यांच्या दरम्यानच्या संख्या शोधता येतील.

हे मला समजले.

- दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असंख्य परिमेय संख्या असतात.

सरावसंच 23

⊙ खाली दिलेल्या दोन संख्यांच्या दरम्यानच्या तीन परिमेय संख्या लिहा.

(i) $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{7}{9}$, $-\frac{5}{9}$

(v) $\frac{-3}{4}$, $\frac{+5}{4}$ (vi) $\frac{7}{8}$, $\frac{-5}{3}$ (vii) $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{7}$ (viii) 0, $\frac{-3}{4}$

✸ अधिक माहितीसाठी

जर m ही पूर्णांक संख्या असेल तर $m + 1$ ही लगतची मोठी पूर्णांक संख्या असते. m व $m + 1$ यांच्या दरम्यान एकही पूर्णांक संख्या नसते. क्रमागत नसलेल्या कोणत्याही दोन पूर्णांक संख्यांच्या दरम्यानच्या पूर्णांक संख्या मोजता येतात हे अनुभवा; मात्र कोणत्याही दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असंख्य परिमेय संख्या असतात.

जरा आठवूया.

दशांश अपूर्णांकांचे गुणाकार व भागाकार कसे करायचे हे आपण पाहिले आहे.

$$\frac{35.1}{10} = 35.1 \times \frac{1}{10} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{351}{100} = 3.51$$

$$\frac{35.1}{100} = \frac{35.1}{1} \times \frac{1}{100} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{351}{1000}\right) = 0.\ 351$$

$$35.1 \times 10 = \frac{351}{10} \times 10 = 351.0$$

$$35.1 \times 1000 = \frac{351}{10} \times 1000 = \left(\frac{351000}{10}\right) = 35100.0$$

यावरून लक्षात येते की, दशांश अपूर्णांकाला 100 ने भागणे म्हणजे दशांशचिन्ह 2 घरे डावीकडे नेणे, 1000 ने गुणणे म्हणजे दशांशचिन्ह तीन घरे उजवीकडे नेणे. असे भागाकार व गुणाकार करताना खालील नियम उपयोगी पडतात.

दशांश अपूर्णांकाच्या अपूर्णांकी भागानंतर कितीही शून्ये लिहिली किंवा पूर्णांक भागाच्या आधी कितीही शून्ये लिहिली तरीही दशांश अपूर्णांकांची किंमत बदलत नाही.

$$1.35 = \frac{135}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{13500}{10000} = 1.3500$$

$0.35 = \dfrac{35}{100} \times \dfrac{1000}{1000} = \dfrac{35000}{100000} = 0.35000$ इत्यादी.

$1.35 = 001.35$ याचा उपयोग कसा होतो ते पाहा.

$\dfrac{1.35}{100} = \dfrac{001.35}{100} = 0.0135$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांचे दशांशरूप (Decimal representation of rational numbers)

उदा. $\dfrac{7}{4}$ ही परिमेय संख्या दशांशरूपात लिहा.

$$\begin{array}{r} 1.75 \\ 4\overline{)7.000} \\ -\ 4 \\ \hline 30 \\ -\ 28 \\ \hline 20 \\ -\ 20 \\ \hline 00 \end{array}$$

(1) 7 = 7.0 = 7.000 (अपूर्णांकी भागानंतर कितीही शून्ये देता येतात.)

(2) 7 ला 4 ने भागल्यावर 1 चा भाग लागला व बाकी 3 उरते. आता 1 या पूर्णांकानंतर दशांशचिन्ह लिहू. बाकी 3 च्या पुढे भाज्यातील 0 लिहून 30 ला 4 ने भागू. आता येणारा भागाकार हा अपूर्णांक भाग आहे म्हणून भागाकारात दशांशचिन्हानंतर 7 लिहू. आता भाज्यातील अजून एक 0 खाली घेऊन भागाकार पूर्ण करू.

या भागाकारात दशांश अपूर्णांकी भागानंतर लिहिलेल्या शून्यांचा उपयोग केला आहे.

उदा. $2\dfrac{1}{5}$ दशांशरूपात लिहा.

$2\dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{5}$ याचे दशांशरूप तीन प्रकारांनी शोधू.

$\dfrac{1}{5}$ चे दशांशरूप काढू.

(I)
$$\begin{array}{r} 0.2 \\ 5\overline{)1.0} \\ -\ 0 \\ \hline 10 \\ -\ 10 \\ \hline 00 \end{array}$$

$\dfrac{1}{5} = 0.2$

$\therefore\ 2\dfrac{1}{5} = 2.2$

(II)
$$\begin{array}{r} 2.2 \\ 5\overline{)11.000} \\ -\ 10 \\ \hline 010 \\ -\ 10 \\ \hline 00 \end{array}$$

(III) $\dfrac{11}{5} = \dfrac{11\times2}{5\times2} = \dfrac{22}{10} = 2.2$

$\dfrac{11}{5} = 2.2$

उदा. $\dfrac{-5}{8}$ ही परिमेय संख्या दशांशरूपात लिहा.

$\dfrac{5}{8}$ चे दशांशरूप भागाकार करून 0.625 मिळते. $\therefore\ \dfrac{-5}{8} = -0.625$

वरील सर्व उदाहरणांत बाकी शून्य आली आहे. भागाकाराची क्रिया पूर्ण झाली आहे. परिमेय संख्यांच्या अशा दशांशरूपाला खंडित दशांशरूप म्हणतात.

उदा. काही परिमेय संख्यांचे दशांशरूप कसे वेगळे आहे ते पाहू.

(i) $\frac{5}{3}$ ही संख्या दशांशरूपात लिहा.

$$\begin{array}{r} 1.66 \\ 3\overline{)5.00} \\ -\ 3 \\ \hline 2\ 0 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline 20 \\ -\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.666.......$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.\dot{6}$

(ii) $\frac{2}{11}$ ही संख्या दशांशरूपात लिहा.

$$\begin{array}{r} 0.18 \\ 11\overline{)2.00} \\ -\ 0 \\ \hline 20 \\ -\ 11 \\ \hline 90 \\ -\ 88 \\ \hline 20 \end{array}$$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.1818.......$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.\overline{18}$

(iii) $2\frac{1}{3}$ चे दशांशरूप काढा. $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$$\begin{array}{r} 2.33 \\ 3\overline{)7.00} \\ -\ 6 \\ \hline 1\ 0 \\ -\ 9 \\ \hline 10 \\ -\ 9 \\ \hline 01 \end{array}$$

$2\frac{1}{3} = 2.33...$

$\therefore 2\frac{1}{3} = 2.\dot{3}$

(iv) $\frac{5}{6}$ चे दशांशरूप काढा.

$$\begin{array}{r} 0.833 \\ 6\overline{)50} \\ -\ 48 \\ \hline 020 \\ -\ 18 \\ \hline 020 \\ -\ 18 \\ \hline 02 \end{array}$$

$\frac{5}{6} = 0.833...$

$\therefore \frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

वरील सर्व उदाहरणांत भागाकाराची क्रिया पूर्ण होत नाही. **दशांशचिन्हाच्या उजवीकडे एक अंक अथवा काही अंकांचा समूह पुन्हा पुन्हा येतो, अशा अपूर्णांकाला आवर्ती दशांश अपूर्णांक म्हणतात.**

ज्या दशांश अपूर्णांकात दशांशचिन्हाच्या उजवीकडे एकच अंक पुन्हा पुन्हा येतो, त्यावर टिंब मांडतात जसे, $2\frac{1}{3} = 2.33... = 2.\dot{3}$ तसेच दशांशचिन्हाच्या उजवीकडे जो अंकांचा गट पुन्हा पुन्हा येतो, त्या गटावर आडवी रेघ देतात. जसे, $\frac{2}{11} = 0.1818........ = 0.\overline{18}$ आणि $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

हे मला समजले.

- काही परिमेय संख्यांचे दशांशरूप खंडित, तर काही परिमेय संख्यांचे दशांशरूप आवर्ती असते.

चला, चर्चा करूया.

- भागाकार न करता, कोणता छेद असणाऱ्या परिमेय संख्यांचे दशांश रुप खंडित असेल हे शोधा.

सरावसंच 24

⊙ खालील परिमेय संख्या दशांशरूपात लिहा.

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{-7}{8}$ (iii) $7\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{12}$ (v) $\frac{22}{7}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{7}{9}$

चला, चर्चा करूया.

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या चिन्हांचा वापर करून लिहिलेली संख्यांची मांडणी म्हणजे पदावली असते.

$72 \div 6 + 2 \times 2$ ही पदावली सोडवून उत्तर काढा.

हौसाची रीत	**मंगरूची रीत**
$72 \div 6 + 2 \times 2$	$72 \div 6 + 2 \times 2$
$= 12 + 2 \times 2$	$= 12 + 2 \times 2$
$= 12 + 4$	$= 14 \times 2$
$= 16$	$= 28$

दोन्ही उत्तरे वेगवेगळी आली. कारण दोघांनी वेगवेगळ्या क्रमाने क्रिया केल्या. याप्रमाणे क्रियांचा क्रम वेगळा घेतला तर उत्तर वेगवेगळे येते. असे होऊ नये म्हणून क्रियांचा क्रम ठरवण्यासाठी काही नियम केले आहेत. ते नियम पाळले तर एकच उत्तर मिळते. ते नियम पाहू. कधी कधी जी क्रिया प्रथम करावी अशी अपेक्षा असते, त्या वेळी पदावलीत कंसाचा वापर करतात.

पदावली सोडवण्याचे नियम

(1) राशीत एकापेक्षा अधिक क्रिया असतील तर गुणाकार व भागाकार या क्रिया डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील त्या क्रमाने कराव्या.

(2) नंतर बेरीज व वजाबाकी या क्रिया, डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील त्या क्रमाने कराव्या.

(3) कंसात एकापेक्षा जास्त क्रिया असतील तर, वरील दोन नियम पाळून त्या क्रिया आधी कराव्या.

वरील नियम वापरले की हौसाची रीत बरोबर आहे हे समजते. $\therefore 72 \div 6 + 2 \times 2 = 16$

खालील पदावली सोडवू.

उदा. $40 \times 10 \div 5 + 17$

$= 400 \div 5 + 17$

$= 80 + 17$

$= 97$

उदा. $80 \div (15 + 8 - 3) + 5$

$= 80 \div (23 - 3) + 5$

$= 80 \div 20 + 5$

$= 4 + 5$

$= 9$

उदा. $2 \times \{25 \times [(113 - 9) + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + 26]\}$

$= 2 \times \{25 \times 130\}$

$= 2 \times 3250$

$= 6500$

उदा. $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{3}{4} - \frac{5}{21}$ (आधी गुणाकार)

$= \frac{3 \times 21 - 5 \times 4}{84}$ (नंतर वजाबाकी)

$= \frac{63 - 20}{84} = \frac{43}{84}$

लक्षात ठेवा :

क्रियांचा क्रम स्पष्ट होण्यासाठी एकापेक्षा जास्त वेळा कंसाचा उपयोग करावा लागतो. त्यासाठी साधा कंस ( ) , चौकटी कंस [ ], महिरपी कंस { } वापरले जातात.

कंस सोडवताना सर्वांत आतील कंसातील क्रिया आधी करतात. नंतर क्रमाने बाहेरच्या कंसातील क्रिया करतात.

सरावसंच 25

खालील पदावली सोडवा.

1. $50 \times 5 \div 2 + 24$
2. $(13 \times 4) \div 2 - 26$
3. $140 \div [(-11) \times (-3) - (-42) \div 14 - 1)]$
4. $\{(220 - 140) + [10 \times 9 + (-2 \times 5)]\} - 100$
5. $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} \div \frac{6}{4}$

उपक्रम : चौकटींतील अंकांचा व चिन्हांचा वापर करा व किंमत 112 येईल अशी पदावली तयार करा.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$+ \quad \times$ $\div \quad -$

*** अधिक माहितीसाठी**

पदावली सोडवताना चिन्हांचा क्रम

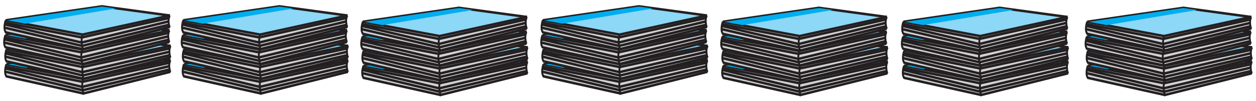
कं →	चे →	भा →	गु →	बे →	व
( )	$\times$	$\div$	$\times$	$+$	$-$
कंसातील क्रिया सर्व प्रथम	चा, ची, चे गुणाकार क्रिया उदा. 200 चे $\frac{1}{4}$ $= 200 \times \frac{1}{4}$	भागाकार	गुणाकार	बेरीज	वजाबाकी

6 घातांक

जरा आठवूया.

7 मुलांना प्रत्येकी 4 वह्यांचे वाटप केले.

एकूण वह्या = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28 वह्या



येथे बेरजेची क्रिया अनेक वेळा केली आहे.

एकाच संख्येची अनेक वेळा केलेली बेरीज ही गुणाकाराच्या रूपात मांडता येते.

एकूण वह्या = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 × 7 = 28

जाणून घेऊया.

पाया व घातांक (Base and Index)

आता 2 ही संख्या अनेक वेळा घेऊन केलेल्या गुणाकाराची मांडणी थोडक्यात कशी करतात ते पाहू.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ येथे 8 वेळा 2 घेऊन गुणाकार केला आहे.

ही मांडणी थोडक्यात 2^8 अशी करतात. येथे 2^8 हे गुणाकाराचे घातांक रूप आहे.

यामध्ये 2 हा **पाया** व 8 हा **घातांक** आहे.

8 ⟵ घातांक

2 ⟵ पाया

उदा. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ येथे 5^4 ही घातांकित संख्या आहे.

5^4 या घातांक रूपातील संख्येत 5 ही संख्या 'पाया' आणि 4 ही संख्या 'घातांक' आहे.

यांचे वाचन '5 चा घातांक 4' किंवा '5 चा चौथा घात' असे करतात.

सामान्यपणे a ही कोणतीही संख्या असेल तर, $a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots$ (m वेळा) $= a^m$

a^m चे वाचन 'a चा घातांक m' किंवा 'a चा m वा घात' असे करतात.

इथे m ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore\ 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ म्हणजे 5^4 या घातांकित संख्येची किंमत 625 आहे.

तसेच $\left[\frac{-2}{3}\right]^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{27}$ म्हणजे $\left[\frac{-2}{3}\right]^3$ ची किंमत $\frac{-8}{27}$ आहे.

$7^1 = 7$, $10^1 = 10$ हे ध्यानात घ्या. **कोणत्याही संख्येचा पहिला घात म्हणजे ती संख्याच असते.** संख्येचा घातांक 1 असेल तर तो न लिहिण्याचा संकेत आहे. जसे $5^1 = 5$, $a^1 = a$

सरावसंच 26

1. पुढील सारणी पूर्ण करा.

अ. क्र.	घातांकित संख्या	पाया	घातांक	गुणाकार रूप	किंमत
(i)	3^4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
(ii)	16^3				
(iii)		(-8)	2		
(iv)				$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$	$\frac{81}{2401}$
(v)	$(-13)^4$				

2. किंमत काढा.

(i) 2^{10} (ii) 5^3 (iii) $(-7)^4$ (iv) $(-6)^3$ (v) 9^3

(vi) 8^1 (vii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (viii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

वर्ग व घन (Square and cube)

$3^2 = 3 \times 3$

3^2 चे वाचन 3 चा दुसरा घात किंवा 3 चा वर्ग असे करतात.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

5^3 चे वाचन 5 चा तिसरा घात किंवा 5 चा घन असे करतात.

लक्षात ठेवा :

कोणत्याही संख्येचा दुसरा घात म्हणजे त्या संख्येचा वर्ग होय.
कोणत्याही संख्येचा तिसरा घात म्हणजे त्या संख्येचा घन होय.

जाणून घेऊया.

पाया समान असलेल्या घातांकित संख्यांचा गुणाकार

उदा. $2^4 \times 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

यावरून $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

उदा. $(-3)^2 \times (-3)^3$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^5$

यावरून $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

उदा. $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

यावरून $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

हे मला समजले.

- जर a ही परिमेय संख्या असेल आणि m व n हे धन पूर्णांक असतील, तर $a^m \times a^n = a^{m+n}$

सरावसंच 27

सोपे रूप द्या.

(i) $7^4 \times 7^2$ (ii) $(-11)^5 \times (-11)^2$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5$

(iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ (v) $a^{16} \times a^7$ (vi) $\left(\frac{P}{5}\right)^3 \times \left(\frac{P}{5}\right)^7$

जाणून घेऊया.

समान पाया असलेल्या घातांकित संख्यांचा भागाकार

उदा. $6^4 \div 6^2 = ?$

$$\frac{6^4}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6}{6\times6}$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 6^2$$

$$\therefore\ 6^4 \div 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$$

उदा. $(-2)^5 \div (-2)^3 = ?$

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)}$$

$$= (-2)^2$$

$$\therefore\ (-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^2$$

हे मला समजले.

- जर a ही शून्येतर परिमेय संख्या, m व n हे धन पूर्णांक आणि $m > n$, असतील तर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a° चा अर्थ

$a \neq 0$ असेल तर

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ तसेच

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

$\therefore\ \boxed{a^0 = 1}$

a^{-m} चा अर्थ

$$a^{-m} = a^{-m} \times 1$$

$$= a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m}$$

$$= \frac{a^{-m+m}}{a^m}$$

$$= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\therefore\ a^{-1} = \frac{1}{a}$

तसेच $a \times \frac{1}{a} = 1$ म्हणजे $a \times a^{-1} = 1$

$\therefore\ a^{-1}$ हा a चा गुणाकार व्यस्त आहे.

याप्रमाणे $\frac{5}{3}$ चा गुणाकार व्यस्त $\frac{3}{5}$ आहे.

$\therefore\ \boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}}$

उदा. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ ही घातांकित संख्या पाहू.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{64}{343}} = \frac{343}{64} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3}$$

हे मला समजले.

- यावरून जर, $a \neq 0$, $b \neq 0$, आणि m ही धन पूर्णांक संख्या असेल तर $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$.

खालील उदाहरणांचे निरीक्षण करून कोणता नियम मिळतो ते पाहू.

उदा. $(3)^4 \div (3)^6$

$$= \frac{3^4}{3^6}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\therefore\ 3^4 \div 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$$

उदा. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{5}$

$$= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{3}}$$

$$\therefore\ \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2-5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

हे मला समजले.

- जर a ही परिमेय संख्या असेल $a \neq 0$ आणि m व n या पूर्णांक संख्या असतील, तर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

जाणून घेऊया.

पाया (-1) असेल आणि घातांक पूर्ण संख्या असेल तर काय होते ते पाहा.

$$(-1)^6 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)} = 1\times1\times1 = 1$$

$$(-1)^5 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times(-1) = 1\times1\times(-1) = -1$$

m ही सम संख्या असेल तर $(-1)^m = 1$ आणि m ही विषम संख्या असेल तर $(-1)^m = -1$

सरावसंच 28

1. सोपे रूप द्या.

   (i) $a^6 \div a^4$ (ii) $m^5 \div m^8$ (iii) $p^3 \div p^{13}$ (iv) $x^{10} \div x^{10}$

2. किंमत काढा.

   (i) $(-7)^{12} \div (-7)^{12}$ (ii) $7^5 \div 7^3$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3} \div \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$ (iv) $4^7 \div 4^5$

जाणून घेऊया.

दोन संख्यांच्या गुणाकाराचा व भागाकाराचा घात

खालील उदाहरणांचे निरीक्षण करून कोणता नियम मिळतो ते पाहू.

उदा. $(2 \times 3)^4$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

उदा. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3}$

हे मला समजले.

जर a व b या शून्येतर परिमेय संख्या असतील आणि m ही पूर्णांक संख्या असेल तर

(1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$(a^m)^n$ म्हणजे घातांकित संख्येचा घात

उदा. $(5^2)^3$

$= 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{2 \times 3}$

$= 5^6$

उदा. $(7^{-2})^{-5} = \frac{1}{(7^{-2})^5}$

$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

$= \frac{1}{7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2}}$

$= \frac{1}{7^{(-2)\times 5}}$

$= \frac{1}{7^{-10}} = 7^{10}$

उदा. $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^3$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-2)+(-2)+(-2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots\ldots$ n वेळा $= a^{m+m+m\cdots\cdots\cdots n \text{ वेळा}} = a^{m \times n}$

वरील उदाहरणांवरून हा नियम मिळतो.

हे मला समजले.

- जर a ही शून्येतर परिमेय संख्या व m आणि n या पूर्णांक संख्या असतील, तर $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$

घातांकांचे नियम

लक्षात ठेवा :

जर a आणि b या शून्येतर परिमेय संख्या, m, n हे पूर्णांक असतील तर,

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

सरावसंच 29

1. सोपे रूप द्या.

(i) $\left[\left(\dfrac{15}{12}\right)^3\right]^4$ (ii) $(3^4)^{-2}$ (iii) $\left(\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-3}\right)^4$ (iv) $\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\right)^{-3}$ (v) $(6^5)^4$

(vi) $\left[\left(\dfrac{6}{7}\right)^5\right]^2$ (vii) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}\right]^5$ (viii) $\left[\left(\dfrac{5}{8}\right)^3\right]^{-2}$ (ix) $\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^6\right]^1$ (x) $\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}\right]^2$

2. खालील संख्या धन घातांक वापरून लिहा.

(i) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\dfrac{11}{3}\right)^{-5}$ (iii) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-3}$ (iv) $(y)^{-4}$

गणित माझा सोबती : विज्ञानात, खगोलशास्त्रात

(1) दशमान पद्धतीत संख्या लिहिताना 10 च्या घातांकाचा विशेष उपयोग करता येतो. पृथ्वी व चंद्र यांतील अंतर 38,40,00,000 मीटर आहे. 10 चा घातांक वापरुन हे अंतर खालीलप्रमाणे लिहितात.

$384\ 000\ 000 = 384 \times 10^6$

$38\ 4000000 = 38.4 \times 10^7$

$3\ 84000000 = 3.84 \times 10^8$ (प्रमाणित रूप)

(2) ऑक्सिजनच्या अणूचा व्यास मिमीमध्ये खाली दिला आहे.

$0.0000000000000356 = 3.56 \times 10^{-14}$

(3) पुढील संख्या प्रमाणित रूपात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

सूर्याचा व्यास 1400000000 मीटर आहे.

प्रकाशाचा वेग = 300000000 मीटर/सेकंद आहे.

(4) शेजारील आकृतीमध्ये Googol ही संख्या दर्शवली आहे ती 10 च्या घातांकाच्या रूपात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

कोणतीही खूप मोठी अथवा खूप लहान संख्या लिहिताना एक अंकी पूर्णांक असलेली दशांश अपूर्णांकी संख्या व 10 चा योग्य घात यांचा गुणाकार करून लिहितात. याला त्या संख्येचे (Standard form) प्रमाणित रूप म्हणतात.

Googol

10000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000

जरा आठवूया.

पूर्ण वर्ग संख्येचे वर्गमूळ काढणे

दिलेल्या संख्येला त्याच संख्येने गुणले असता येणारा गुणाकार हा त्या संख्येचा वर्ग असतो.

उदा. $6 \times 6 = 6^2 = 36$

$6^2 = 36$ याचे वाचन आपण 6 चा वर्ग 36 आहे असे करतो.

उदा. $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ याचे वाचन (-5) चा वर्ग 25 असे आहे.

जाणून घेऊया.

✱ दिलेल्या संख्येचे वर्गमूळ काढणे.

उदा. $3 \times 3 = 3^2 = 9$ येथे 3 चा वर्ग 9 आहे.

हीच माहिती 9 चे वर्गमूळ 3 आहे अशा रूपात लिहिता येते.

वर्गमुळासाठी $\sqrt{\ }$ ही खूण वापरतात. $\sqrt{9}$ म्हणजे 9 चे वर्गमूळ $\therefore \sqrt{9} = 3$ आहे.

उदा. $7 \times 7 = 7^2 = 49$ $\therefore \sqrt{49} = 7$

उदा. $8 \times 8 = 8^2 = 64$ यावरून $\sqrt{64} = 8$

$(-8) \times (-8) = (-8)^2 = 64$ यावरून 64 चे वर्गमूळ -8 असेही मिळते.

x ही धन संख्या असेल तर तिची दोन वर्गमुळे असतात.

त्यांपैकी ऋण वर्गमूळ $-\sqrt{x}$ ने व धन वर्गमूळ $\sqrt{x}$ ने दर्शवले जाते.

उदा. 81 चे वर्गमूळ काढा.

$81 = 9 \times 9 = -9 \times -9$ $\therefore \sqrt{81} = 9$ आणि $-\sqrt{81} = -9$

आपण बहुतेक वेळा धन वर्गमुळाचा विचार करतो.

✱ दिलेल्या संख्येचे अवयव पद्धतीने वर्गमूळ काढणे.

उदा. 144 चे वर्गमूळ काढा.

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयवां पासून समान अवयवांच्या जोड्या करा.

$$144 = 2 \times 72$$
$$= 2 \times 2 \times 36$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 18$$
$$= \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$$

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

मिळालेल्या अवयवांमधील समान अवयवांच्या जोड्या तयार करा.

प्रत्येक जोडीतील एक अवयव घेऊन त्यांचा गुणाकार करा.

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

उदा. 324 चे वर्गमूळ काढा.

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयव काढून समान अवयवांच्या जोड्या करा.

$$
\begin{aligned}
324 &= 2 \times 162 \\
&= 2 \times 2 \times 81 \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 27 \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 \\
&= \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}
\end{aligned}
$$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

वर्गमुळासाठी प्रत्येक जोडीतील एक संख्या घ्या व गुणाकार करा.

$\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

सरावसंच 30

⦿ वर्गमूळ काढा.

(i) 625 (ii) 1225 (iii) 289 (iv) 4096 (v) 1089

✸ अधिक माहितीसाठी (भागाकार पद्धतीने वर्गमूळ)

(1) 9801 चे वर्गमूळ काढा.

	99
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
+ 9	− 81
189	1701
+ 9	− 1701
198	0000

$\sqrt{9801} = 99$

(2) 19321 चे वर्गमूळ काढा.

	139
1	$\overline{1}\,\overline{93}\,\overline{21}$
+ 1	− 1
23	093
+ 3	− 69
269	2421
+ 9	− 2421
278	0000

(3) 141.61 चे वर्गमूळ काढा.

	11.9
1	$\overline{1}\,\overline{41}.\overline{61}$
+ 1	− 1
21	041
+ 1	− 21
229	2061
+ 9	− 2061
238	0000

ज्या संख्येचे मूळ अवयव फार मोठे आहेत व त्यामुळे अवयव पाडणे कठीण आहे, तिचे वर्गमूळ शोधण्यासाठी ही पद्धत उपयोगी पडते.

आता आणखी एक उपयोग पाहण्यासाठी $\sqrt{137}$ काढू.

	11.7
1	$\overline{1}\,\overline{37}.\overline{00}$
+ 1	−1
21	037
+ 1	− 21
227	1600
+ 7	− 1589
234	11

$\sqrt{137} > 11.7$

पण $(11.8)^2 = 139.24$

$\therefore 11.7 < \sqrt{137} < 11.8$

याप्रमाणे $\sqrt{137}$ च्या जवळपासची संख्या शोधता येते.

ज्या संख्येचे वर्गमूळ पूर्ण संख्या नाही, तिच्या वर्गमुळाच्या जवळपासचा दशांश अपूर्णांक या पद्धतीने मिळू शकतो.

7 जोडस्तंभालेख

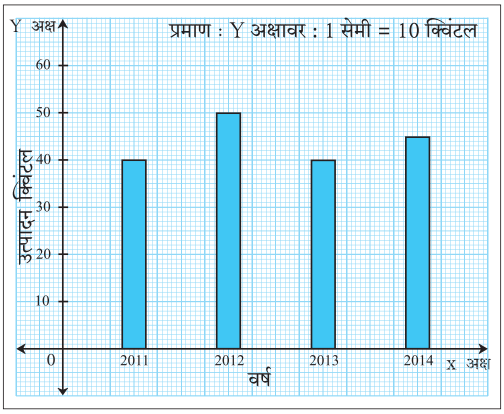
3BDQ9V

चला, चर्चा करूया.

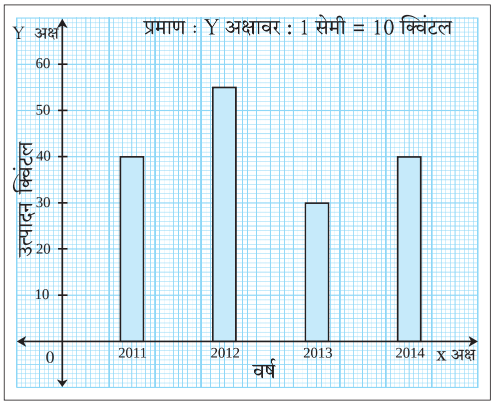
जोडस्तंभालेख

अजय आणि विजय यांच्या शेतातील गव्हाचे उत्पादन क्विंटलमध्ये किती आहे याची माहिती खाली दोन स्तंभालेखांमध्ये दर्शवली आहे. त्यांचे निरीक्षण करा.

अजयचे गहू उत्पादन

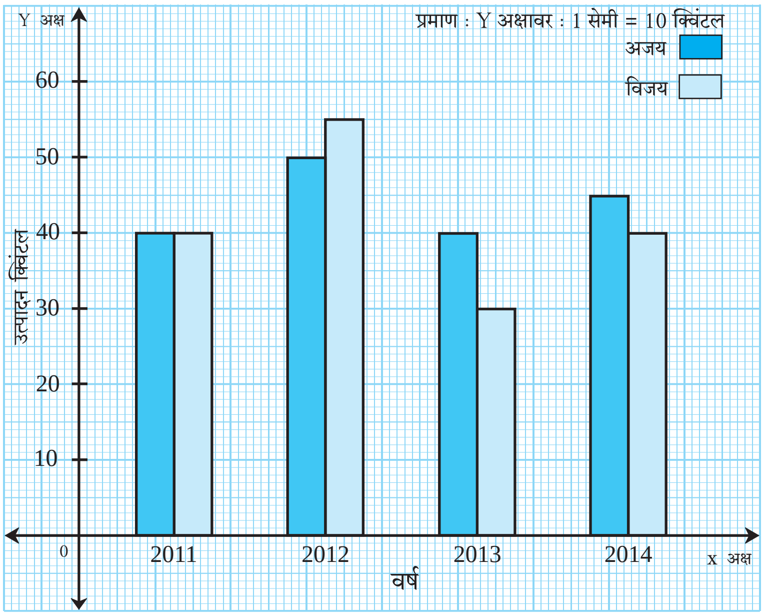


विजयचे गहू उत्पादन



दोन्ही आलेखांतील माहिती एकाच आलेखात दाखवता येते का ते पाहू. पुढील आलेख पाहा. याप्रमाणे कमी जागेत जास्त माहिती देता येईल, तसेच अजय व विजय यांच्या गव्हाच्या उत्पादनाची तुलना करणे सोपे जाईल. अशा प्रकारच्या स्तंभालेखाला जोडस्तंभालेख म्हणतात.

अजयचे आणि विजयचे गहू उत्पादन

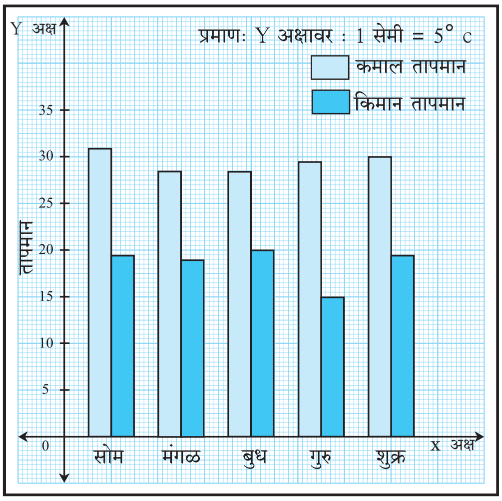


जोडस्तंभालेखाचे निरीक्षण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

- कोणत्या वर्षी दोघांचे गव्हाचे उत्पादन सारखेच आहे ?
- 2014 साली कोणाचे गव्हाचे उत्पादन जास्त होते ?
- 2013 साली प्रत्येकाचे गव्हाचे उत्पादन किती होते ?

जोडस्तंभालेखाचे वाचन

पुणे शहरातील पाच दिवसांचे कमाल व किमान तापमान (°C मध्ये) दिले आहे. जोडस्तंभालेखाचे निरीक्षण करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या.



- X - अक्षावर कोणती माहिती दर्शवली आहे ?
- Y - अक्षावर कोणती माहिती दर्शवली आहे ?
- सर्वांत जास्त तापमान कोणत्या दिवशी आहे ?
- किमान तापमान कोणत्या दिवशी सर्वांत जास्त आहे ?
- गुरुवारी कमाल व किमान तापमानांत फरक किती ?
- कोणत्या दिवशी कमाल व किमान तापमानांतील फरक सर्वांत जास्त आहे ?

जाणून घेऊया.

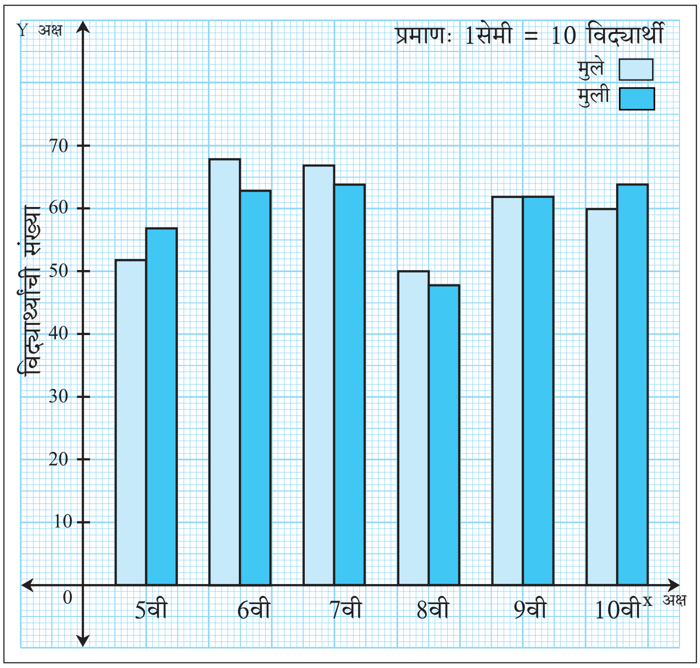
जोडस्तंभालेख (Joint bar graph) काढणे

एका शाळेतील मुले आणि मुली यांची संख्या दिली आहे. माहितीवरून जोडस्तंभालेख तयार करा.

इयत्ता	5वी	6वी	7वी	8वी	9वी	10वी
मुले	52	68	67	50	62	60
मुली	57	63	64	48	62	64

जोडस्तंभालेखासाठी पायऱ्या

1. आलेख कागदावर X अक्ष व Y अक्ष आणि त्यांचा छेदनबिंदू दाखवा.
2. दोन जोडस्तंभालेखांतील अंतर समान ठेवून X अक्षावर इयत्ता दाखवा.
3. Y अक्षावर प्रमाण ठरवा.
   जसे 1 एकक = 10 मुले/मुली,
   Y अक्षावर मुलांची/मुलींची संख्या दर्शवा.
4. ठरविलेल्या प्रमाणानुसार प्रत्येक इयत्तेतील मुलांच्या व मुलींच्या संख्या दाखवणाऱ्या स्तंभांची उंची ठरवा व स्तंभालेख काढा. दोन स्तंभ वेगळे दाखवण्यासाठी वेगळे रंग वापरा.

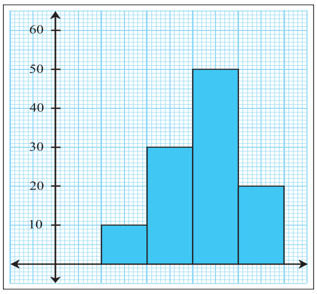


हे मला समजले.

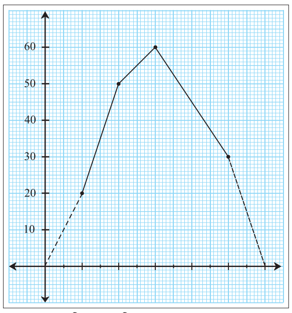
- जोडस्तंभालेखात सर्व स्तंभांची रुंदी समान असावी.
- लगतच्या दोन्ही जोडस्तंभांतील अंतर समान असावे.
- जोडस्तंभालेखाचा वापर तुलनात्मक अभ्यासासाठी करतात.

गणित माझा सोबती : वर्तमानपत्र, मासिके, माहितीचे सादरीकरण

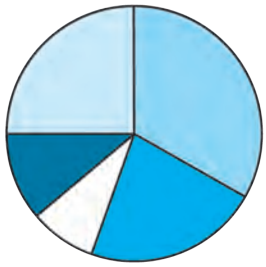
- वृत्तपत्रातील विविध प्रकारच्या आलेखांचा संग्रह करून त्यावर चर्चा करा.



1. आयतालेख



2. रेषालेख



3. वृत्तालेख

ICT Tools or Links

माहितीचे सादरीकरण करताना जोडस्तंभालेखाऐवजी विविध आलेखांचा वापर केला जातो. MS-Excell, Graph Matica, Geogebra यांमध्ये असलेले वेगवेगळे आलेख शिक्षकांच्या मदतीने पाहा.

सरावसंच 31

1. जागतिक वृक्षदिनी दोन शाळांनी लावलेल्या रोपांची संख्या सारणीमध्ये दिली आहे, त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

रोपाचे नाव / शाळेचे नाव	बदाम	करंज	कडुलिंब	अशोक	गुलमोहर
नूतन विद्यालय	40	60	72	15	42
भारत विद्यालय	42	38	60	25	40

2. एका ज्यूस सेंटरवर शनिवारी व रविवारी वेगवेगळ्या फळांचे ज्यूस घेण्यासाठी आलेल्या ग्राहकांची संख्या सारणीत दर्शवली आहे. त्या माहितीवरून जोडस्तंभालेख काढा.

फळे / वार	मोसंबी	संत्री	सफरचंद	अननस
शनिवार	43	30	56	40
रविवार	59	65	78	67

3. ग्रामपंचायत निवडणुकीमध्ये पाच मतदान केंद्रांवर खालीलप्रमाणे मतदान झाले. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

व्यक्ती \ केंद्र क्रमांक	1	2	3	4	5
पुरुष	200	270	560	820	850
स्त्रिया	700	240	340	640	470

4. भारतातील पाच शहरांचे कमाल व किमान तापमान °C मध्ये दिले आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

तापमान \ शहर	दिल्ली	मुंबई	कोलकता	नागपूर	कपूरथला
कमाल तापमान	35	32	37	41	37
किमान तापमान	26	25	26	29	26

5. सारणीमध्ये सोलापूर, पुणे येथील शासकीय रुग्णालयात एका दिवसात लसीकरण केलेल्या बालकांची संख्या दिली आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

शहर \ लसीचे नाव	डी. पी.टी. पूरक	पोलिओ पूरक	गोवर	कावीळ
सोलापूर	65	60	65	63
पुणे	89	87	88	86

6. महाराष्ट्र व गुजरात राज्यांतील साक्षर लोकांचे प्रमाण शेकडेवारीमध्ये दिलेले आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

राज्य \ सन	1971	1981	1991	2001	2011
महाराष्ट्र	46	57	65	77	83
गुजरात	40	45	61	69	79

गणिती गंमत

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

यावरून $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ हे सूत्र लक्षात येते का ?

हे सूत्र $n = 5, 6, 7, 8, \ldots$ या संख्यांसाठी पडताळून पहा.

विज्ञानाच्या प्रयोगांतील नोंदींवरून अनुमान काढण्यासाठी तसेच भूगोल, अर्थशास्त्र यांमध्येही जोडस्तंभालेखाचा उपयोग होतो.

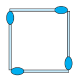
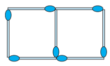
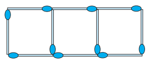
8 बैजिक राशी व त्यांवरील क्रिया

3BHL8I

जाणून घेऊया.

बैजिक राशी (Algebraic expressions)

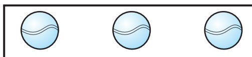
- खाली दिलेल्या काड्यांची रचना पाहा व आकृतिबंधाचे निरीक्षण करा.

काड्यांची रचना				......	..	......	..	......
चौरस	1	2	3	4	..	10	..	n
काड्यांची संख्या	4	7	10	13	..	......	..	......
	3 + 1	6 + 1	9 + 1	12 + 1	..	......	..	......
	$3 \times 1 + 1$	$3 \times 2 + 1$	$3 \times 3 + 1$	$3 \times 4 + 1$		$3 \times 10 + 1$		$3 \times n + 1$

वरील आकृतिबंधाचे निरीक्षण करून लक्षात येते की, काड्यांची संख्या = 3 × चौरसांची संख्या + 1

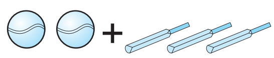
चौरसांची संख्या बदलती आहे. ती 2, 3, 4, ... , 10,... यांपैकी काहीही असू शकते. चौरसांची संख्या माहीत नसल्यास ती अक्षराने दाखवतात. येथे चौरसांची संख्या n या अक्षराने दाखवली आहे.

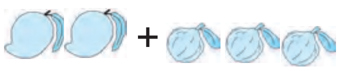
n हे चल आहे. चलाचा उपयोग केलेली $3 \times n + 1$ म्हणजेच $3n + 1$ ही बैजिक राशी आहे.

 = 3 चेंडू

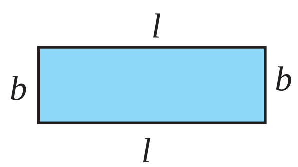
△ △ △ = 3 त्रिकोण

t t t = $3t$

 = □ चेंडू + □ बॅट

 = □ आंबे + □ पेरू

$x + x + y + y + y = 2x + 3y$



आयताची परिमिती $= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

हे मला समजले.

- $3n + 1$, $3t$, $2x + 3y$, $2(l + b)$ या बैजिक राशी आहेत.
  या राशींमध्ये n, t, y, l, b, x ही चले आहेत.

जाणून घेऊया.

$3x$ या राशीत 3 हा x या चलाचा सहगुणक (coefficient) आहे.

$-15t$ मध्ये -15 हा t या चलाचा सहगुणक आहे.

ज्या राशीत गुणाकार ही एकच क्रिया असते त्या राशीला पद (term) म्हणतात.

बैजिक राशी एकपदी असते किंवा अनेक पदांची बेरीज असते.

पद	सहगुणक	चले
$11mn$	11	m, n
$-9x^2y^3$	-9	x, y
$\frac{5}{6}p$	$\frac{5}{6}$	p
a	1	a

उदा. बैजिक राशी : $4x^2 - 2y + \frac{5}{6}xz$

या राशीत $4x^2$ हे पहिले पद आहे. त्यात 4 हा सहगुणक आहे.

$-2y$ हे दुसरे पद आहे. त्यात -2 हा सहगुणक आहे.

$\frac{5}{6}xz$ हे तिसरे पद आहे. त्यात $\frac{5}{6}$ हा सहगुणक आहे.

लक्षात ठेवा:

- $15 - x$ या बैजिक राशीत दोन पदे आहेत. पहिले पद 15 ही एक संख्या आहे.
  $15 - x = 15 + (-x)$ $\therefore$ दुसरे पद $-x$ आहे. या पदामधील x या चलाचा सहगुणक (-1) आहे.
- ज्या पदांतील चले व त्यांचे घातांक समान असतात, त्या पदांना सरूप पदे (सजातीय पदे) म्हणतात.

सजातीय पदे (सरूप पदे) (Like terms)

(i) $2x, \ 5x, \ -\frac{2}{3}x$ (ii) $-5x^2y, \ \frac{6}{7}yx^2$

विजातीय पदे (भिन्नरूप पदे) (Unlike terms)

(i) $7xy, \ 9y^2, \ -2xyz, \ 8mn, \ 8m^2n^2, \ 8m^3n$

बैजिक राशींचे प्रकार (Types of algebraic expressions)

पदांच्या संख्येवरून राशीचे नाव ठरते. एक पद असल्यास एकपद राशी, दोन पदे असल्यास द्विपद राशी, तीन पदे असल्यास त्रिपद राशी, तीनहून जास्त पदे असल्यास बहुपद राशी असे नाव दिले जाते.

एकपद राशी	द्विपद राशी	त्रिपद राशी	बहुपद राशी
• $4x$	• $2x - 3y$	• $a + b + c$	• $a^3 - 3a^2b + 3ab - b^3$
• $\frac{5}{6}m$	• $2l + 2b$	• $x^2 - 5x + 6$	• $4x^4 - 7x^2 + 9 - 5x^3 - 16x$
• -7	• $3mn - 5m^2n$	• $8a^3 - 5a^2b + c$	• $5x^5 - \frac{1}{2}x + 8x^3 - 5$

सरावसंच 32

⊙ खालील राशींचे पदांच्या संख्येवरून एकपद राशी, द्विपद राशी इत्यादी प्रकारे वर्गीकरण करा.

(i) $7x$ (ii) $5y - 7z$ (iii) $3x^3 - 5x^2 - 11$ (iv) $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

(v) $5m - 3$ (vi) a (vii) 4 (viii) $3y^2 - 7y + 5$

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींची बेरीज (Addition of algebraic expressions)

✱ एकपदींची बेरीज (Addition of monomials)

उदा. 3 पेरू + 4 पेरू = (3 + 4) पेरू = 7 पेरू **उदा.** $3x + 4x = (3 + 4)\ x = 7x$

सजातीय पदांची बेरीज एकाच प्रकारच्या वस्तूंच्या बेरजेप्रमाणे करतात.

उदा. बेरीज करा.

(i) $-3x - 8x + 5x = (-3 - 8 + 5)x = -6x$

(ii) $\frac{2}{3}ab - \frac{5}{7}ab = (\frac{2}{3} - \frac{5}{7})\ ab = \frac{-1}{21}\ ab$

(iii) $-2p^2 + 7p^2 = (-2 + 7)p^2 = 5p^2$

> विचार करा.
> $3x + 4y$ = किती?
> 3 पेरू + 4 आंबे = 7 पेरू ?
> $7m - 2n = 5m$?

✱ द्विपद राशींची बेरीज (Addition of binomial expressions)

आडवी मांडणी

उदा. $(2x + 4y) + (3x + 2y)$

$= 2x + 3x + 4y + 2y$

$= 5x + 6y$

उभी मांडणी

$$\begin{array}{rr} & 2x + 4y \\ + & 3x + 2y \\ \hline & 5x + 6y \end{array}$$

सजातीय पदांची बेरीज करताना त्या पदांच्या सहगुणकांची बेरीज करून त्यापुढे चल लिहितात.

उदा. बेरीज करा. $9x^2y^2 - 7xy$; $3x^2y^2 + 4xy$

आडवी मांडणी

$(9x^2y^2 - 7xy) + (3x^2y^2 + 4xy)$

$= 9x^2y^2 - 7xy + 3x^2y^2 + 4xy$

$= (9x^2y^2 + 3x^2y^2) + (-7xy + 4xy)$

$= 12x^2y^2 - 3xy$

उभी मांडणी

$$\begin{array}{rr} & 9x^2y^2 - 7xy \\ + & 3x^2y^2 + 4xy \\ \hline & 12x^2y^2 - 3xy \end{array}$$

सांभाळा बरे!

$3x + 7y$ येथे दोन्ही पदे सजातीय नाहीत त्यामुळे त्यांची बेरीज $3x + 7y$ किंवा $7y + 3x$ अशीच लिहावी लागते.

सरावसंच 33

⊙ बेरीज करा.

(i) $9p + 16q$; $13p + 2q$

(ii) $2a + 6b + 8c$; $16a + 13c + 18b$

(iii) $13x^2 - 12y^2$; $6x^2 - 8y^2$

(iv) $17a^2b^2 + 16c$; $28c - 28a^2b^2$

(v) $3y^2 - 10y + 16$; $2y - 7$

(vi) $-3y^2 + 10y - 16$; $7y^2 + 8$

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींची वजाबाकी (Subtraction of algebraic expressions)

पूर्णांकांची वजाबाकी करताना एका पूर्णांकातून दुसरा पूर्णांक वजा करणे म्हणजेच पहिल्या पूर्णांकात दुसऱ्या पूर्णांकाची विरुद्ध संख्या मिळवणे हे आपण अभ्यासले आहे.

याच नियमाचा वापर आपण बैजिक राशीच्या वजाबाकीसाठी करणार आहोत.

उदा. $18 - 7$

$= 18 + (-7) = 11$

उदा. $9x - 4x$

$= [9 + (-4)]x = 5x$

उदा. पहिल्या राशीतून दुसरी राशी वजा करा.

$16x + 23y + 12z \; ; \; 9x - 27y + 14z$

आडवी मांडणी

$(16x + 23y + 12z) - (9x - 27y + 14z)$

$= 16x + 23y + 12z - 9x + 27y - 14z$

$= (16x - 9x) + (23y + 27y) + (12z - 14z)$

$= 7x + 50y - 2z$

उभी मांडणी

$$\begin{array}{rrrr} & 16x & + 23y & + 12z \\ - & +9x & -27y & +14z \\ & - & + & - \\ \hline & 7x & + 50y & - 2z \end{array}$$

(जी राशी वजा करायची त्या राशीतील प्रत्येक पदाचे चिन्ह बदलून बेरीज करावी.)

सरावसंच 34

⊙ पहिल्या राशीतून दुसरी राशी वजा करा.

(i) $(4xy - 9z) \; ; \; (3xy - 16z)$ (ii) $(5x + 4y + 7z) \; ; \; (x + 2y + 3z)$

(iii) $(14x^2 + 8xy + 3y^2) \; ; \; (26x^2 - 8xy - 17y^2)$

(iv) $(6x^2 + 7xy + 16y^2) \; ; \; (16x^2 - 17xy)$ (v) $(4x + 16z) \; ; \; (19y - 14z + 16x)$

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींचा गुणाकार (Multiplication of algebraic expressions)

✸ एकपदीला एकपदीने गुणणे

उदा. $3x \times 12y$

$= 3 \times 12 \times x \times y$

$= 36xy$

उदा. $(-12x) \times 3y^2$

$= -12 \times 3 \times x \times y \times y$

$= -36xy^2$

उदा. $2a^2 \times 3ab^2$

$= 2 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2$

$= 6a^3 b^2$

उदा. $(-3x^2) \times (-4xy)$

$= (-3) \times (-4) \times x^2 \times x \times y$

$= 12x^3y$

दोन एकपदींचा गुणाकार करताना, सर्वप्रथम सहगुणकांचा चिन्हे लक्षात घेऊन गुणाकार करावा. नंतर चलांचा गुणाकार करावा.

✸ द्विपदीला एकपदीने गुणणे

उदा. $x\,(x + y)$

$= x \times x \;+\; x \times y$

$= x^2 + xy$

उदा. $(7x - 6y) \times 3z = 7x \times 3z - 6y \times 3z$

$= 7 \times 3 \times x \times z \;-\; 6 \times 3 \times y \times z$

$= 21xz - 18yz$

✸ द्विपदीला द्विपदीने गुणणे

उदा.

$$\begin{array}{rll} & 3x + 4y & \\ \times & 5x + 7y & \\ \hline & 15x^2 + 20xy & \text{[5x ने गुणून]} \\ & + 21xy + 28y^2 & \text{[7y ने गुणून]} \\ \hline & 15x^2 + 41xy + 28y^2 & \text{[बेरीज करून]} \end{array}$$

$(3x + 4y)\;\;(5x + 7y)$

$= 3x\,(5x + 7y) + 4y\,(5x + 7y)$

$= 3x \times 5x + 3x \times 7y + 4y \times 5x + 4y \times 7y$

$= 15x^2 + 21xy + 20xy + 28y^2$

$= 15x^2 + 41xy + 28y^2$

उदा. एका आयताकृती शेताची लांबी $(2x + 7)$ मी व रुंदी $(x + 2)$ मी आहे, तर त्या शेताचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : आयताकृती शेताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी $= (2x + 7) \times (x + 2)$

$= 2x\,(x + 2) + 7\,(x + 2)$

$= 2x^2 + 11x + 14$

आयताकृती शेताचे क्षेत्रफळ $(2x^2 + 11x + 14)$ मी^{2}

सरावसंच 35

1. गुणाकार करा.

   (i) $16xy \times 18xy$ (ii) $23xy^2 \times 4yz^2$

   (iii) $(12a + 17b) \times 4c$ (iv) $(4x + 5y) \times (9x + 7y)$

2. एका आयताची लांबी $(8x + 5)$ सेमी व रुंदी $(5x + 3)$ सेमी आहे, तर त्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.

जरा आठवूया.

एकचल समीकरणे (Equations in one variable)

- खालील समीकरणे सोडवा.

(1) $x + 7 = 4$ (2) $4p = 12$ (3) $m - 5 = 4$ (4) $\frac{t}{3} = 6$

जाणून घेऊया.

उदा. $2x + 2 = 8$

$\therefore\; 2x + 2 - 2 = 8 - 2$

$\therefore\; 2x = 6$

$\therefore\; x = 3$

उदा. $3x - 5 = x - 17$

$3x - 5 + 5 - x = x - 17 + 5 - x$

$\therefore\; 2x = -12$

$\therefore\; x = -6$

उदा. एका आयताची लांबी ही त्याच्या रुंदीच्या दुपटीपेक्षा 1 सेमी जास्त आहे. त्या आयताची परिमिती 50 सेमी असल्यास त्याची लांबी किती ?

उकल : आयताची रुंदी x सेमी मानू.

आयताची लांबी $(2x + 1)$ सेमी होईल.

$2 \times$ लांबी $+ 2 \times$ रुंदी $=$ आयताची परिमिती

$2(2x + 1) + 2x = 50$

$\therefore \ 4x + 2 + 2x = 50$

$6x + 2 = 50$

$6x = 50 - 2$

$\therefore \ 6x = 48 \ \therefore \ x = 8$

आयताची रुंदी 8 सेमी आहे.

आयताची लांबी $= 2x + 1 = 2 \times 8 + 1$

$\therefore$ आयताची लांबी $= 17$ सेमी आहे.

उदा. एक नैसर्गिक संख्या व तिची लगतची पुढची संख्या यांची बेरीज 69 आहे, तर त्या संख्या कोणत्या ?

उकल : एक नैसर्गिक संख्या x मानू.

पुढची लगतची संख्या $x + 1$ आहे.

$(x) + (x + 1) = 69$

$\therefore \ x + x + 1 = 69$

$\therefore \ 2x + 1 = 69$

$2x = 69 - 1$

$\therefore 2x = 68 \therefore \ x = 34$

नैसर्गिक संख्या $= 34$

लगतची पुढील नैसर्गिक संख्या $= 34 + 1$

$= 35$

लक्षात ठेवा :

एखादे पद समीकरणातील '=' या चिन्हाच्या एका बाजूकडून दुसऱ्या बाजूकडे नेत असताना त्याचे चिन्ह बदलावे लागते.

सरावसंच 36

1. $(3x - 11y) - (17x + 13y)$ या वजाबाकीसाठी अचूक पर्याय निवडा.

   (i) $7x - 12y$ (ii) $-14x - 54y$ (iii) $-3(5x + 4y)$ (iv) $-2(7x + 12y)$

2. $(23x^2y^3z) \times (-15x^3yz^2)$ याचे उत्तर .... येईल .

   (i) $-345x^5y^4z^3$ (ii) $345x^2y^3z^5$ (iii) $145x^3y^2z$ (iv) $170x^3y^2z^3$

3. खालील समीकरणे सोडवा.

   (i) $4x + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ (ii) $10 = 2y + 5$ (iii) $5m - 4 = 1$

   (iv) $6x - 1 = 3x + 8$ (v) $2(x - 4) = 4x + 2$ (vi) $5(x + 1) = 74$

4. राकेशचे वय सानियाच्या वयापेक्षा 5 वर्षांनी कमी आहे. त्यांच्या वयांची बेरीज 27 वर्षे आहे, तर प्रत्येकाचे वय किती ?

5. एका वनराईमध्ये अशोकाची जेवढी झाडे लावली त्यापेक्षा जांभळाची 60 झाडे अधिक लावली. तेथे दोन्ही प्रकारची एकूण झाडे 200 असतील, तर जांभळाची झाडे किती लावली ?

6. शुभांगीजवळ 50 रुपयांच्या जेवढ्या नोटा आहेत त्याच्या दुप्पट नोटा 20 रुपयांच्या आहेत. तिच्याजवळ एकूण 2700 रुपये आहेत तर 50 रुपयांच्या नोटा किती ?

7*. विराटने केलेल्या धावा रोहितच्या धावांच्या दुप्पट होत्या. दोघांच्या मिळून झालेल्या धावा द्विशतकापेक्षा दोनने कमी होत्या तर दोघांनी प्रत्येकी किती धावा काढल्या ?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) $(-16) \times (-5)$ (ii) $(72) \div (-12)$ (iii) $(-24) \times (2)$

(iv) $125 \div 5$ (v) $(-104) \div (-13)$ (vi) $25 \times (-4)$

2. मूळ अवयव पाडून खालील संख्यांचा मसावि व लसावि काढा.

(i)75, 135 (ii) 114, 76 (iii) 153, 187 (iv) 32, 24, 48

3*. संक्षिप्त रूप द्या.

(i) $\frac{322}{391}$ (ii) $\frac{247}{209}$ (iii) $\frac{117}{156}$

4. खालील संख्यांचे वर्गमूळ काढा.

(i) 784 (ii) 225 (iii) 1296 (iv) 2025 (v) 256

5. एका निवडणुकीसाठी चार मतदान केंद्रे दिलेली आहेत. प्रत्येक केंद्रावरील स्त्रिया व पुरुष यांनी केलेल्या मतदानाची माहिती सारणीत दिलेली आहे. त्यावरून जोडस्तंभालेख काढा.

मतदार केंद्रे	नवोदय विद्यालय	विद्यानिकेतन शाळा	सिटी हायस्कूल	एकलव्य शाळा
स्त्रिया	500	520	680	800
पुरुष	440	640	760	600

6. पदावली सोडवा.

(i) $45 \div 5 + 20 \times 4 - 12$ (ii) $(38 - 8) \times 2 \div 5 + 13$

(iii) $\frac{5}{3} + \frac{4}{7} \div \frac{32}{21}$ (iv) $3 \times \{ 4 [85 + 5 - (15 \div 3)] + 2 \}$

7. सोडवा.

(i) $\frac{5}{12} + \frac{7}{16}$ (ii) $3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{12}{5} \times \frac{(-10)}{3}$ (iv*) $4\frac{3}{8} \div \frac{25}{18}$

8. ΔABC असा काढा की, $m\angle A = 55^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$, आणि $l(AB) = 5.9$ सेमी.

9. ΔXYZ असा काढा की, $l(XY) = 3.7$ सेमी $l(YZ) = 7.7$ सेमी, $l(XZ) = 6.3$ सेमी.

10. ΔPQR असा काढा की, $m\angle P = 80^\circ$, $m\angle Q = 70^\circ$, $l(QR) = 5.7$ सेमी.

11. दिलेल्या मापावरून ΔEFG काढा. $l(FG) = 5$ सेमी, $m\angle EFG = 90^\circ$, $l(EG) = 7$ सेमी.

12. ΔLMN मध्ये $l(LM) = 6.2$ सेमी, $m\angle LMN = 60^\circ$, $l(MN) = 4$ सेमी तर ΔLMN काढा.

13. खालील कोनांच्या कोटिकोनांची मापे लिहा.

(i) 35° (ii) a° (iii) 22° (iv) $(40-x)^\circ$

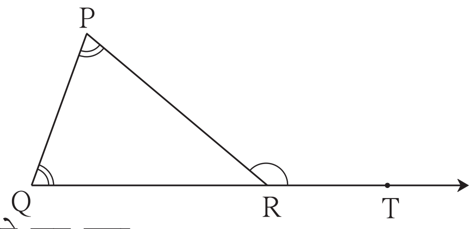
14. खालील कोनांच्या पूरक कोनांची मापे लिहा.

(i) 111° (ii) 47° (iii) 180° (iv) $(90-x)^\circ$

15. खालील आकृत्या काढा.

(i) संलग्न कोनांची जोडी (ii) पूरक कोन आहेत परंतु संलग्न नाहीत असे कोन

(iii) दोन संलग्न कोटिकोनांची जोडी

16. 

ΔPQR मध्ये $\angle P$ व $\angle Q$ यांची मापे समान आहेत व $m\angle PRQ = 70^\circ$ तर खालील कोनांची मापे काढा.

(i) $m\angle PRT$ (ii) $m\angle P$ (iii) $m\angle Q$

17. सोपे रूप द्या.

(i) $5^4 \times 5^3$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^8 \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-6}$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \div \left(\frac{5}{4}\right)$

18. किंमत काढा.

(i) $17^{16} \div 17^{16}$ (ii) 10^{-3} (iii) $(2^3)^2$ (iv) $4^6 \times 4^{-4}$

19. सोडवा.

(i) $(6a-5b-8c) + (15b+2a-5c)$ (ii) $(3x+2y)(7x-8y)$

(iii) $(7m-5n) - (-4n-11m)$ (iv) $(11m-12n+3p) - (9m+7n-8p)$

20. खालील समीकरणे सोडवा.

(i) $4(x + 12) = 8$ (ii) $3y + 4 = 5y - 6$

बहुपर्यायी प्रश्न

खालील प्रश्नांना पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्या उत्तरांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

1. त्रिकोणाचे तीनही कोनदुभाजक एकसंपाती असतात. त्यांच्या संपातबिंदूस .... म्हणतात.

(i) परिमध्य (ii) शिरोबिंदू (iii) अंतर्मध्य (iv) छेदबिंदू

2. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^4 =$ ....

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-7}$ (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-10}$ (iii) $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ (iv) $\left(\frac{3}{7}\right)^{20}$

3. $5 \div \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}$ याचे सरळरूप .... आहे.

(i) 3 (ii) 5 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{3}$

4. $3x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + x$ या समीकरणाची उकल .... आहे.

(i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) 4 (iv) $\frac{3}{2}$

5*. खालीलपैकी कोणत्या पदावलीची किंमत 37 आहे ?

(i) $10 \times 3 + (5 + 2)$ (ii) $10 \times 4 + (5 - 3)$

(iii) $8 \times 4 + 3$ (iv) $(9 \times 3) + 2$

9 समप्रमाण आणि व्यस्तप्रमाण

विभाग दुसरा

3BHHD6

चला, चर्चा करूया.

समप्रमाण (Direct proportion)

आपण मागील इयत्तेत दोन संख्यांची तुलना करून ती गुणोत्तराच्या रूपात कशी लिहितात ते पाहिले आहे.

उदा. आता खालील चित्र पाहा. येथे वर्तुळात दाखवलेल्या व्यासांमुळे वर्तुळाचे झालेले भाग दाखवले आहेत.

(A) (B) (C) (D)

येथे व्यासांची संख्या व तयार होणाऱ्या वर्तुळाच्या भागांची संख्या यांचा काही संबंध दिसून येतो का ?

- आकृती (A) मध्ये **एका** व्यासामुळे वर्तुळाचे ☐ भाग झाले आहेत.
- आकृती (B) मध्ये **दोन** व्यासांमुळे वर्तुळाचे ☐ भाग झाले आहेत.
- आकृती (D) मध्ये **चार** व्यासांमुळे वर्तुळाचे ☐ भाग झाले आहेत.

$\dfrac{\text{व्यासांची संख्या}}{\text{भागांची संख्या}} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8}$ येथे व्यासांची संख्या व त्यामुळे झालेल्या भागांची संख्या यांचे गुणोत्तर स्थिर आहे.

उदा. नगरपालिकेच्या शाळेतील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या वह्यांची संख्या खालील सारणीत दाखवली आहे.

मुले	15	12	10	5
वह्या	90	72	60	30

$\dfrac{\text{मुलांची संख्या}}{\text{वह्यांची संख्या}} = \dfrac{15}{90} = \dfrac{12}{72} = \dfrac{10}{60} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$

म्हणजेच हे गुणोत्तर 1:6 असे स्थिर किंवा कायम (constant) आहे.

वरील दोन्ही उदाहरणांत असे दिसते की, व्यासांची संख्या वाढली तर वर्तुळातील भागांची संख्या वाढते. विद्यार्थ्यांची संख्या कमी झाली तर वह्यांची संख्या देखील कमी होते. व्यासांची संख्या व वर्तुळ भागांची संख्या या समप्रमाणात आहेत तसेच विद्यार्थी संख्या व वह्यांची संख्या समप्रमाणात आहेत.

उपक्रम : ✸ मोटार सायकलमध्ये भरलेले पेट्रोल आणि तिने कापलेले अंतर हे समप्रमाणात असते का ? विचार करा.

✸ विज्ञानातील व दैनंदिन व्यवहारातील सम प्रमाणात बदलणाऱ्या संख्यांची उदाहरणे देता येतील का? त्याची चर्चा करा.

उदा. 10 पेनांची किंमत 60 रुपये असेल तर, अशा 13 पेनांची किंमत किती रुपये ?

उकल : 13 पेनांची किंमत काढायची आहे. ती x रुपये होईल असे मानू.

पेनांची संख्या व त्यांची किंमत समप्रमाणात असल्यामुळे त्यांचे गुणोत्तर मांडून समीकरण मिळवू.

$$\frac{10}{60} = \frac{13}{x}$$

$\therefore\ 10x = 780$ (दोन्ही बाजूंना $60x$ ने गुणले)

$$x = 78$$

13 पेनांची किंमत 78 रुपये आहे.

सरावसंच 37

1. 7 किग्रॅ कांदे 140 रुपयांना तर 12 किग्रॅ कांदे किती रुपयांना मिळतील ?
2. 600 रुपयांमध्ये 15 पेंढ्या कडबा मिळतो, तर 1280 रुपयांमध्ये किती पेंढ्या कडबा मिळेल ?
3. रोज 13 किग्रॅ 500 ग्रॅम पूरक खुराक 9 गाईंना पुरतो, त्याच प्रमाणात 12 गाईंना किती खुराक लागेल ?
4. 12 क्विंटल सोयाबीनला 36,000 रुपये पडतात, तर 8 क्विंटल सोयाबीनची किंमत किती ?
5. दोन मोबाइलची किंमत 16,000 रुपये आहे असे 13 मोबाइल खरेदी केले, तर एकूण किती रुपये लागतील ?

जाणून घेऊया.

व्यस्तप्रमाण (Inverse proportion)

वृक्षारोपण करण्यासाठी 90 खड्डे खणायचे आहेत. त्यासाठी काही स्वयंसेवक जमले आहेत. एक स्वयंसेवक रोज एक खड्डा खणतो.

15 स्वयंसेवकांना ते खड्डे खणायला $\frac{90}{15} = 6$ दिवस लागतील.

10 स्वयंसेवकांना ते खड्डे खणायला $\frac{90}{10} = 9$ दिवस लागतील.

स्वयंसेवकांची संख्या व खड्डे खणण्यासाठी लागणारे दिवस हे समप्रमाणात आहेत का ?

स्वयंसेवकांची संख्या **कमी झाली** की लागणारे दिवस **वाढतात** याउलट स्वयंसेवकांची संख्या वाढली तर कामाचे दिवस कमी होतात. स्वंयसेवक व दिवस यांच्या संख्यांचा गुणाकार स्थिर आहे. या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

उदा. समजा सुधाला एका संग्रहातील 48 उदाहरणे सोडवायची आहेत. तिने रोज 1 उदाहरण केले तर तिला संग्रह पूर्ण करण्यास 48 दिवस लागतील. तिने रोज 8 उदाहरणे सोडवली तर, संग्रह पूर्ण करण्यास तिला $\frac{48}{8} = 6$ दिवस लागतात. ती रोज 12 उदाहरणे करत असेल तर तिला $\frac{48}{12} = 4$ दिवस लागतील.

रोज सोडवलेली उदाहरणे व लागणारे दिवस व्यस्त प्रमाणात आहेत. त्यांचा गुणाकार स्थिर आहे.

$8 \times 6 = 12 \times 4 = 48 \times 1$ हे लक्षात घ्या.

उदा. एक मोठी भिंत बांधायला 15 मजुरांना 8 तास लागतात; तर 12 मजुरांना तेच काम करायला किती तास लागतील ?

उकल : मजुरांची संख्या वाढली की कामाचे तास कमी होतात.

मजुरांची संख्या व त्यांना लागणारा वेळ यांचे प्रमाण व्यस्त आहे.

मजुरांची संख्या व भिंत बांधायला लागणारे तास यांचा गुणाकार स्थिर आहे.

आता x या चलाचा वापर करून हे उदाहरण सोडवू.

12 मजुरांना x तास लागतात असे मानू.

15 मजुरांना 8 तास लागतात.

12 मजुरांना x तास लागतात.

$12 \times x = 15 \times 8$

$\therefore \quad 12x = 120$

$\therefore \quad x = 10$

यावरून 12 मजुरांना भिंत बांधायला 10 तास लागतील.

उदा. वर्गामध्ये 40 पानी हस्तलिखित अंक तयार करण्याचे काम चालू केले. एका विद्यार्थ्याला हा अंक तयार करायला 80 दिवस लागतात, तर 4 विद्यार्थ्यांना अंक तयार करायला किती दिवस लागतील ?

उकल : एकच काम जास्त विद्यार्थी करत असतील तर कमी दिवस लागतील म्हणजे विद्यार्थी संख्या व दिवसांची संख्या यांचे प्रमाण व्यस्त आहे. चार विद्यार्थ्यांना x दिवस लागतात असे मानू.

विद्यार्थी	दिवस
1	80
4	x

$4x = 80 \times 1$

$x = \frac{80}{4}$

$x = 20$ $\quad \therefore$ 4 विद्यार्थ्यांना 20 दिवस लागतील.

उदा. एका शाळेतील 7 वी चे विद्यार्थी सहलीसाठी एका शेतमळ्यामध्ये बसने गेले. त्या वेळी आलेले त्यांचे काही अनुभव पाहू. प्रत्येक अनुभवातील संख्या समप्रमाणात आहेत की व्यस्तप्रमाणात ते लिहा.

- सहलीसाठी प्रत्येक मुलाकडून खर्चासाठी 60 रुपये घेतले.

  एकूण 45 विद्यार्थी होते म्हणून $\boxed{}$ रुपये जमले.

  जर 50 विद्यार्थी असते तर $\boxed{}$ रुपये जमले असते.

  विद्यार्थ्यांची संख्या व जमणारी वर्गणी हे .... प्रमाणात आहेत.

- शाळेजवळच्या मिठाईवाल्याने सहलीसाठी 90 लाडू दिले.

  45 विद्यार्थी सहलीला आले तर प्रत्येकाला $\boxed{}$ लाडू मिळाले.

  30 विद्यार्थी सहलीला आले असते तर प्रत्येकाला $\boxed{}$ लाडू मिळाले असते.

  विद्यार्थ्यांची संख्या व प्रत्येकाला मिळणारे लाडू .... प्रमाणामध्ये आहेत.

- सहलीचे ठिकाण शाळेपासून 120 किमी होते.

  शेतमळ्यात जाताना बसचा वेग ताशी 40 किमी होता म्हणून $\boxed{}$ तास लागले.

  परत येताना बसचा वेग ताशी 60 किमी होता म्हणून $\boxed{}$ तास लागले.

  बसचा वेग व लागणारा वेळ हे .... प्रमाणात आहेत.

- शेतकऱ्याने त्याच्या झाडांची बोरे जमा केली. ती 180 होती.

  त्याने 45 विद्यार्थ्यांना ती समान वाटली. प्रत्येकाला $\boxed{\quad}$ बोरे मिळाली.

  जर 60 विद्यार्थी असते तर प्रत्येकाला $\boxed{\quad}$ बोरे मिळाली असती.

  विद्यार्थ्यांची संख्या व प्रत्येकाला मिळणारी बोरांची संख्या हे .... प्रमाणामध्ये आहेत.

सरावसंच 38

1. एका शेताची खुरपणी पूर्ण करण्यास 5 मजुरांना 12 दिवस लागतात, तर 6 मजुरांना किती दिवस लागतील ? 15 मजुरांना किती दिवस लागतील ?
2. मोहनरावांनी रोज 40 पाने याप्रमाणे एक पुस्तक वाचले, तर ते पुस्तक 10 दिवसांत वाचून पूर्ण होते. तेच पुस्तक 8 दिवसांत वाचून पूर्ण करायचे असल्यास दररोज किती पाने वाचावीत ?
3. मेरीचा सायकल चालवण्याचा वेग ताशी 6 किमी आहे. ती 12 किमी अंतरावरील मावशीच्या घरी जाणार आहे, तर तिला किती वेळ लागेल ? तिच्या सायकलचा वेग ताशी 4 किमी झाला, तर तिला किती वेळ लागेल ?
4. एका शासकीय गोदामातील धान्यसाठा 4000 माणसांना 30 दिवस पुरतो, तर तो धान्यसाठा 6000 माणसांना किती दिवस पुरेल?

जाणून घेऊया.

भागीदारी (Partnership)

एखादा व्यवसाय चालू करताना जागा, कच्ची सामग्री इत्यादींसाठी पैसे लागतात. त्या रकमेला भांडवल म्हणतात. अनेकदा दोन किंवा अधिक व्यक्ती मिळून भांडवल गोळा करतात. म्हणजेच त्या व्यक्ती भागीदारीत गुंतवणूक करून व्यवसाय सुरू करतात. भागीदारीच्या व्यवसायात बँकेमध्ये भागीदारांचे संयुक्त खाते असते. त्या व्यवसायासाठी भांडवलाची ज्या प्रमाणात गुंतवणूक असते त्या प्रमाणात व्यवसायात झालेला नफा किंवा तोटा याचे वाटप केले जाते.

उदा. झेलम व अथर्व यांनी अनुक्रमे 2100 व 2800 रुपये भांडवल घालून व्यवसाय चालू केला. त्यांना 3500 रुपये फायदा झाला. तो कसा वाटावा ?

उकल : भांडवलाचे प्रमाण काढू. 2100:2800 म्हणजे $\frac{2100}{2800} = \frac{3}{4}$ म्हणून भांडवलाचे प्रमाण 3:4 आहे.

नफ्याचे वाटप भांडवलाच्या प्रमाणात करायचे आहे. झेलमचा नफा $3x$ व अथर्वचा नफा $4x$ मानू.

$\therefore\ 3x + 4x = 3500$ एकूण नफा 3500 आहे.

$\therefore\ 7x = 3500$ $\therefore\ x = 500$

झेलमला $3x = 1500$ रुपये व अथर्वला $4x = 2000$ रुपये नफा मिळेल.

उदा. एका व्यवसायात चिन्मय आणि सॅम यांनी 130000 रुपये भांडवल 3:2 या प्रमाणात गुंतवले तर प्रत्येकाची गुंतवणूक किती ? या व्यवसायात त्यांना 36000 रुपयांचा नफा झाला, तर प्रत्येकाचा नफा किती असेल ?

उकल : चिन्मय आणि सॅम यांच्या गुंतवणुकीचे प्रमाण 3:2 आहे.

गुंतवणुकीच्या **प्रमाणात** नफ्याची वाटणी होते म्हणून नफ्याचे प्रमाण 3:2 असेल.

चिन्मयची गुंतवणूक $3y$ व सॅमची गुंतवणूक $2y$ मानू.

$3y + 2y$ = एकूण गुंतवणूक

$\therefore 5y = 130000$

$\frac{5y}{5} = \frac{130000}{5}$ ..... (5 ने भागून)

$\therefore y = 26000$

$\therefore$ चिन्मयची गुंतवणूक $= 3y$

$= 3 \times 26000$

$= 78,000$

सॅमची गुंतवणूक $= 2y$

$= 2 \times 26000$

$= 52000$

चिन्मयचा नफा $3x$ व सॅमचा नफा $2x$ मानू.

$3x + 2x$ = एकूण नफा

$5x = 36000$

$\frac{5x}{5} = \frac{36000}{5}$ ..... (5 ने भागून)

$\therefore x = 7200$

$\therefore$ चिन्मयचा नफा $= 3x$

$= 3 \times 7200$

$= 21600$

सॅमचा नफा $= 2x$

$= 2 \times 7200$

$= 14400$

उदा. अब्दुल, सेजल व सोहम यांनी सायलीला 30 रुपये व 70 रुपये आणि 50 रुपये दिले. सायलीने त्यात 150 रुपये घालून कागद, रंग या वस्तू आणल्या. त्यापासून सर्वांनी भेटकार्डे बनवली व ती सर्व भेटकार्डे विकली. त्यांना एकूण 420 रुपये नफा मिळाला. तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला ?

उकल : चौघांचे मिळून एकूण भांडवल 300 रुपये होते. त्यांपैकी सायलीचे 150 रुपये होते म्हणजे निम्मे भांडवल तिचे होते. त्यांना एकूण 420 रुपये नफा मिळाला. सायलीचा नफा 420 ची निमपट म्हणजे 210 रुपये झाला. उरलेला 210 रुपये नफा अब्दुल, सेजल व सोहम यांना वाटला.

अब्दुल, सेजल व सोहम यांचे भांडवल अनुक्रमे 30 रुपये व 70 रुपये आणि 50 रुपये आहे. भांडवलाचे प्रमाण 30:70:50 आहे. म्हणजेच 3:7:5 आहे. तिघांचा नफा 210 रुपये आहे.

त्यांचा नफा अनुक्रमे $3k$, $7k$, $5k$ मानू. $3k + 7k + 5k = 210$

$\therefore 15k = 210$

$\therefore k = 14$

म्हणजे अब्दुलचा नफा $= 3k = 3 \times 14 = 42$ रुपये

सेजलचा नफा $= 7k = 7 \times 14 = 98$ रुपये, सोहमचा नफा $= 5k = 5 \times 14 = 70$ रुपये

उदा. सरिताबेन, आयेशा आणि मीनाक्षी यांनी प्रत्येकी 2400, 5200 व 3400 रुपये गुंतवून व्यवसाय चालू केला. त्यांना 50% नफा झाला. तो त्यांनी कसा वाटून घ्यावा ? तो काढून न घेता पुढच्या वर्षाच्या व्यवसायासाठी भांडवलात मिळवला, तर प्रत्येकीची पुढच्या वर्षासाठी भागीदारी किती असेल ?

उकल : एकूण भांडवल $= 2400 + 5200 + 3400 = 11000$ रुपये

या भांडवलावर 50% नफा झाला.

$\therefore$ एकूण नफा $= \frac{11000 \times 50}{100} = 5500$

भांडवलाच्या प्रमाणात नफा वाटायचा आहे.

आपण दोन संख्यांचे प्रमाण दोन्ही संख्यांना सामाईक विभाजकाने भागून सोपे करून घेतो. त्याचप्रमाणे दोनपेक्षा अधिक संख्यांचे प्रमाण सोपे करता येते.

भागीदारीचे प्रमाण $= 2400 : 5200 : 3400$

$= 24 : 52 : 34$ (100 ने भागून)

$= 12 : 26 : 17$ (2 ने भागून)

सरिताबेनचा नफा $=12p$, आयेशाचा नफा $= 26p$, मीनाक्षीचा नफा $= 17p$ मानू.

$\therefore\ 12p + 26p + 17p = 55p = 5500\ \therefore\ p = \dfrac{5500}{55} = 100$

$\therefore$ सरिताबेनचा नफा $= 12 \times 100 = 1200$, आयेशाचा नफा $= 26 \times 100 = 2600$ व

मीनाक्षीचा नफा $= 17 \times 100 = 1700$,

नफा काढून न घेता तो भांडवलात मिळवला तर प्रत्येकीचे नवे भांडवल काढू.

पुढच्या वर्षासाठी सरिताबेनचे भांडवल $= 2400 + 1200 =$ ₹ 3600

पुढच्या वर्षासाठी आयेशाचे भांडवल $= 5200 + 2600 =$ ₹ 7800

पुढच्या वर्षासाठी मीनाक्षीचे भांडवल $= 3400 + 1700 =$ ₹ 5100

चला, चर्चा करूया.

- वरील उदाहरणात सरिताबेन, आयेशा व मीनाक्षी यांतील प्रत्येकीने नफा काढून न घेता स्वत:च्या गुंतवणुकीत मिळवला, तर पुढच्या वर्षासाठी त्यांच्या गुंतवणुकीचे प्रमाण काढा.

सरावसंच 39

1. सुरेश आणि रमेश यांनी 144000 रुपये 4:5 या प्रमाणात गुंतवून एक भूखंड खरेदी केला. काही वर्षांनी तो विकून त्यांना 20% नफा मिळाला, तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला?
2. विराट व सम्राट यांनी अनुक्रमे 50000 रुपये व 120000 रुपये गुंतवून व्यवसाय चालू केला. या व्यवसायात त्यांना 20% तोटा झाला. तर प्रत्येकाला किती तोटा झाला ?
3. श्वेता, पियुष आणि नचिकेत या तिघांनी मिळून सोलापुरी चादर व टॉवेल विकण्याचा व्यवसाय 80000 रुपये गुंतवून सुरू केला. त्यांपैकी श्वेताचे भांडवल 30000 रुपये होते व पियुषचे भांडवल 12000 रुपये होते. त्यांना वर्षाखेरीस 24% नफा झाला, तर नचिकेतची भागीदारी किती होती ? नचिकेतला मिळालेल्या नफ्याची रक्कम किती?
4. अ व ब यांनी मिळालेला 24500 रुपये नफा 3:7 या प्रमाणात वाटून घेतला. प्रत्येकाने आपल्याला मिळालेल्या नफ्यापैकी 2% रक्कम सैनिक कल्याण निधीला दिली, तर प्रत्येकाने किती रक्कम निधीसाठी दिली ?

5*. जया, सीमा, निखिल आणि निलेश यांनी व्यवसायासाठी 3:4:7:6 या प्रमाणात 360000 रुपयांची भागीदारी केली. तर जयाचे भांडवल किती रुपये होते ? त्यांना या व्यवहारात 12% नफा झाला. तर निखिलच्या वाट्याला किती रुपये मिळतील ?

❑❑❑

10 बँक व सरळव्याज

3NAQTQ

जरा आठवूया.

बँक ही पैशांचे व्यवहार करणारी सरकारमान्य संस्था असते. बँकेमुळे पैशाचे नियोजन म्हणजे अर्थनियोजन करणे सोपे जाते. बँकेमध्ये रोख रकमेचा भरणा करणे किंवा रोख रक्कम काढणे असा व्यवहार करता येतो. त्यासाठी बँकेत खाते उघडावे लागते. बँकेमध्ये विविध प्रकारची खाती असतात.

जाणून घेऊया.

विविध खाती

✸ चालू खाते (Current account)

चालू खाते मुख्यत: व्यापाऱ्यांसाठी व रोज पैशांचे व्यवहार करणाऱ्यांसाठी असते. यामध्ये खातेदार एका दिवसात कितीही वेळा देवघेव करू शकतो. बँक या खात्यासाठी पासबुक व मागणी केल्यास चेकबुक देते. या प्रकारच्या खात्यावर बँक व्याज देत नाही. चेकच्या साहाय्याने बँकेत पैसे भरता येतात किंवा बँकेतून पैसे काढता येतात.

✸ बचत खाते (Savings account)

खातेदाराला ठरावीक रक्कम बँकेत जमा करून बचत खाते उघडता येते. काही बँकांमध्ये काहीही रक्कम जमा न करता खाते उघडता येते. या खात्यावर दररोजच्या जमा शिलकेच्या आधारे बँक काही व्याज देते. अनेकदा ठरावीक काळामध्ये किती वेळा पैसे काढता येतात यावर निर्बंध असतात. या खात्यासाठी बँक पासबुक व मागणीनुसार चेकबुक देते.

✸ आवर्ती ठेव खाते (Recurring deposit account)

या खात्यामध्ये दर महिन्याला ठराविक रक्कम जमा करतात. ती किती असावी हे बँक खातेदार ठरवतात. या प्रकारच्या ठेवींवर बँक व्याज देते. हे व्याज बचत खात्यापेक्षा जास्त असते, अशा खात्यामुळे खातेदाराची सक्तीची बचत होते.

उपरोक्त खात्यांसाठी बँकेत कधी कधी संयुक्त खाते असणे सोईचे असते. उदा., पति-पत्नी, पालक व पाल्य इत्यादी. तसेच व्यवसायातील भागीदारी, हाउसिंग सोसायटी, सेवाभावी न्यास इत्यादींसाठी बँकेतील खाते एकाहून जास्त व्यक्तींना वापरणे जरुरीचे असते.

✸ मुदत ठेव (Fixed deposit)

ठेवीदार ठरावीक रक्कम ठरावीक कालावधीसाठी बँकेत जमा करून ठेवतो. या प्रकारच्या ठेवींवर बँक बचत खात्यापेक्षा अधिक व्याजदर देते. मुदत ठेवींवरील व्याजदर प्रत्येक बँकेत भिन्न असू शकतो. ज्येष्ठ नागरिकांना नियमित दरापेक्षा थोडा जास्त व्याजदर मिळतो.

क्रेडिट, ए.टी.एम/डेबिट कार्ड : बँकेत न जाता रोख रक्कम मिळवण्यासाठी ATM (Automated teller machine) कार्डाचा उपयोग होतो. रोख रकमेशिवाय व्यवहार करण्यासाठी क्रेडिट कार्ड व डेबिट कार्ड वापरता येते. ही कार्डे विनंतीवरून त्या बँकेच्या खातेदारास मिळू शकतात.

चला, चर्चा करूया.

- तुम्ही बँकेचे पासबुक पाहिले आहे का ?

  या ठिकाणी बँक पासबुकाचे एक पान दिलेले आहे. त्यातील नोंदींचे निरीक्षण करा.

ओळ क्र. पंक्ति क्र. LINE NO.	तारीख दिनांक DATE	तपशील ब्यौरा PARTICULARS	चेक क्रमांक चेक क्रमांक CHEQUE No.	रक्कम काढली निकाली गई रकम AMOUNT WITHDRAWN	रक्कम ठेवली जमा की गई रकम AMOUNT DEPOSITED	शिल्लक बाकी जमा BALANCE
1.	2.2.2016	cash			1500.00	7000.00
2.	8.2.2016	cheque	232069		5000.00	12000.00
3.	12.2.2016	cheque	243965	3000.00		9000.00
4.	15.2.2016	self		1500.00		7500.00
5.	26.2.2016	interest			135.00	7635.00

- दिनांक 2.2.16 रोजी बँकेत जमा केलेली रक्कम $\boxed{}$ रुपये. शिल्लक रक्कम $\boxed{}$ रुपये.
- दिनांक 12.2.16 रोजी चेक क्र. 243965 ने $\boxed{}$ रक्कम काढली. शिल्लक रक्कम $\boxed{}$ रुपये.
- दिनांक 26.2.16 रोजी बँकेने व्याज (interest) दिले आहे. त्याची रक्कम $\boxed{}$ रुपये.

बचत खाते व आवर्ती ठेव खाते यासाठी पासबुक असते. त्या पासबुकामध्ये तारखेनुसार ठेवलेले पैसे, काढलेले पैसे व शिल्लक या सर्वांची नोंद असते.

उपक्रम : तुमच्या घरातील मोठ्या व्यक्तीच्या परवानगीने त्यांच्या बँकेच्या पासबुकातील नोंदींचा अर्थ समजून घ्या.

जरा आठवूया.

सुविद्याने संगणक खरेदी करण्यासाठी द.सा.द.शे. 8 दराने बँकेकडून 30000 रुपये एका वर्षासाठी कर्जाऊ घेतले. मुदत पूर्ण झाल्यावर घेतलेल्या रकमेपेक्षा तिला 2400 रुपये जादा द्यावे लागले.

- या माहितीवरून खालील चौकटीत योग्य संख्या लिहा.

  मुद्दल = ₹ $\boxed{}$, व्याजाचा दर = ₹ $\boxed{}$, व्याज = ₹ $\boxed{}$, मुदत = $\boxed{}$ वर्ष

  बँकेत परत केलेली एकूण रक्कम = 30000 + 2400 = $\boxed{}$

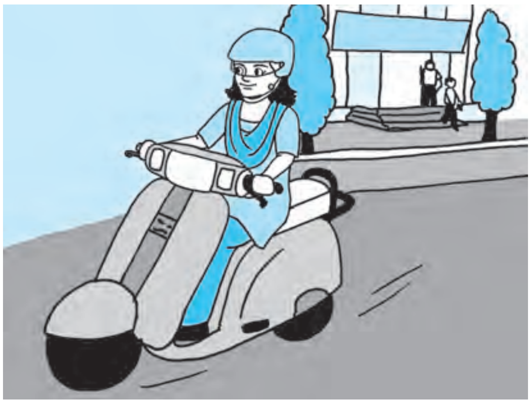
जाणून घेऊया.

वरील उदाहरणात सुविद्याने बँकेत एकूण किती रक्कम जमा केली हे काढण्यासाठी मुद्दल व व्याज यांची बेरीज केली. या रकमेला रास असे म्हणतात.

मुद्दल + व्याज = रास

उदा. नेहाने दुचाकी वाहन घेण्यासाठी द.सा.द.शे. 12 दराने बँकेकडून रुपये 50,000 कर्ज घेतले. एका वर्षानंतर ती बँकेस एकूण किती रक्कम परत देईल ?

उकल : वरील उदाहरणात मुदतीनंतर बँकेस एकूण परत केलेली रक्कम काढायची आहे म्हणजेच रास काढायची आहे. येथे मुद्दल 50000 रुपये आहे. द.सा.द.शे. 12 दराने म्हणजे 100 रुपये मुद्दलावर 1 वर्षाचे व्याज 12 रुपये आहे.



व्याजाचे मुद्दलाशी असलेले गुणोत्तर दोन प्रकारांनी लिहून समीकरण मिळवू.

50000 रुपये मुद्दलावर मिळणारे व्याज x रुपये मानू.

100 रुपये मुद्दलावर मिळणारे व्याज 12 रुपये आहे.

$$\frac{x}{50000} = \frac{12}{100}$$

$$\frac{x}{50000} \times 50000 = \frac{12}{100} \times 50000 \qquad \text{(दोन्ही बाजूंना 50000 ने गुणू)}$$

$$x = 6000$$

(बँकेस परत देण्याची रक्कम) रास $=$ मुद्दल $+$ व्याज

$= 50000 + 6000$

$\therefore$ बँकेस परत देण्याची रक्कम $=$ ₹ 56000

उदा. आकाशने द.सा.द.शे. 8 दराने बँकेत 25000 रुपये 3 वर्षांसाठी ठेव म्हणून ठेवले, तर त्याला प्रत्येक वर्षी किती व्याज मिळाले ? एकूण किती व्याज मिळाले ?

उकल : या उदाहरणात मुद्दल 25000 रुपये, मुदत 3 वर्ष, व्याजाचा दर शेकडा 8 आहे.

100 रुपये मुद्दलावर 8 रुपये व्याज आहे म्हणून 25000 रुपये मुद्दलावर 1 वर्षाला x रुपये व्याज आहे, असे मानू. व्याजाचे मुद्दलाशी असलेले गुणोत्तर पाहू.

$$\frac{x}{25000} = \frac{8}{100}$$

$$\therefore \frac{x}{25000} \times 25000 = \frac{8}{100} \times 25000 \qquad \text{(दोन्ही बाजूंना 25000 ने गुणू)}$$

$$\therefore x = 2000$$

आकाशला 1 वर्षासाठी 2000 रुपये व्याज मिळाले.

आकाशला 3 वर्षांचे एकूण $= 2000 \times 3 = 6000$ रुपये व्याज मिळाले.

जाणून घेऊया.

सरळव्याजाची उदाहरणे सोडवताना एका सूत्राचा उपयोग होतो, ते सूत्र पाहू.

दरवर्षी मुद्दल कायम ठेवून एकाच दराने व्याजाची आकारणी होते. त्या आकारणीला सरळव्याजाची आकारणी म्हणतात. 'म' मुद्दल 'क' वर्षांसाठी ठेवले आणि व्याज दर दसादशे 'द' असेल तर एकूण किती व्याज मिळेल ते काढू. 'म' मुद्दलावर 1 वर्षाचे व्याज 'व' मानू.

1 वर्षाचे व्याज व मुद्दल यांचे गुणोत्तर पाहू.

$$\therefore \frac{व}{म} = \frac{द}{100} \qquad \therefore व = \frac{म \times द}{100}$$

$$क \text{ वर्षाचे व्याज} = व \times क = \frac{म \times द \times क}{100}$$

$$\therefore \text{एकूण व्याज} = \frac{\text{मुद्दल} \times \text{दर} \times \text{काळ}}{100}$$

आधीचे उदाहरण सूत्राने सोडवू.

वरील उदाहरणात म = 25000, द = 8, क = 3

$$\text{एकूण व्याज} = \frac{म \times द \times क}{100}$$

$$= \frac{25000 \times 8 \times 3}{100}$$

$$= 6000$$

म्हणून एकूण व्याज 6000 रुपये आहे.

हे मला समजले.

- $\text{एकूण व्याज} = \frac{म \times द \times क}{100}$ येथे म = मुद्दल, द = व्याजाचा दर, क = मुदत (वर्षे)

उदा. संदीपभाऊने मुलाच्या शिक्षणासाठी द.सा.द.शे. $8\frac{1}{2}$ दराने बँकेकडून 120000 रुपये शैक्षणिक कर्ज 4 वर्षांसाठी घेतले. त्यांनी ती मुदत संपली तेव्हा बँकेला एकूण किती रक्कम परत केली ?

उकल : या उदाहरणात मुद्दल 120000 रुपये आहे. सूत्र वापरून व्याज काढू.

म = 120000, द = 8.5, क = 4

$$\therefore \text{एकूण व्याज} = \frac{म \times द \times क}{100} = \frac{120000 \times 8.5 \times 4}{100}$$

$$= \frac{120000 \times 85 \times 4}{100 \times 10}$$

$$= 120 \times 85 \times 4$$

$$= 40800$$

बँकेस परत केलेली एकूण रक्कम म्हणजेच रास = 120000 + 40800 = 160800 रुपये दिले.

सरावसंच 40

1. रिहानाने 1500 रुपये शाळेतील संचयिकेमध्ये द.सा.द.शे. 9 दराने 2 वर्षांसाठी ठेवल्यास तिला एकूण किती रक्कम मिळेल ?
2. जेठालाल यांनी बँकेकडून द.सा.द.शे. 10 दराने 2,50,000 रुपये 5 वर्षांच्या मुदतीने गृहकर्ज घेतले. तर त्यांना प्रत्येक वर्षी किती व्याज द्यावे लागेल ? तसेच त्यांना बँकेला एकूण किती रक्कम द्यावी लागेल ?

3*. श्रीकांतने 85,000 रुपये द.सा.द.शे. 7 दराने $2\frac{1}{2}$ वर्षांसाठी 'बचत' बँकेत ठेवले. तर त्यांना मुदतीच्या शेवटी किती सरळव्याज मिळाले ?

4. व्याजाच्या काही दराने 5000 रुपये मुद्दलावर 4 वर्षांत 1200 रुपये व्याज होते, तर त्याच दराने त्याच मुदतीत 15000 रुपये मुद्दलाचे व्याज किती होईल ?
5. पंकजने 1,50,000 रुपये द.सा.द.शे. 10 दराने 2 वर्षांसाठी बँकेत ठेव म्हणून ठेवले, तर त्या मुदतीनंतर एकूण किती रक्कम त्यांना परत मिळेल ?

जाणून घेऊया.

मुद्दल, मुदत, दर, रास यांपैकी तीन बाबी दिल्यास चौथी बाब काढणे.

सूत्रामध्ये शोधण्याच्या संख्येसाठी अक्षर मानून समीकरण मांडून उदाहरण सोडवता येते.

उदा. मुद्दल = 25000 रुपये, रास = 31,000 रुपये, मुदत = 4 वर्षे तर व्याजाचा दर किती ?

येथे रास − मुद्दल = एकूण व्याज

31000 − 25000 = 6000

मुद्दल = 25000 रुपये, मुदत = 4 वर्षे, व्याज = 6000 रुपये,

आता आपण सूत्राच्या साहाय्याने व्याजाचा दर काढूया. दर = द मानू

$$\text{सरळव्याज} = \frac{\text{मुद्दल} \times \text{दर} \times \text{कालावधी}}{100}$$

$$6000 = \frac{25000 \times \text{द} \times 4}{100}$$

$$\text{द} = \frac{6000 \times 100}{25000 \times 4}$$

$\therefore$ द = 6 $\quad\therefore$ व्याजाचा दर द.सा.द.शे 6 रुपये आहे.

उदा. उन्मेशने काही रक्कम 5 वर्षांसाठी सरळव्याजाने कर्जाऊ घेतली. व्याजाचा दर द.सा.द.शे. 9 आहे. त्याने मुदतीअखेर एकूण 17400 रुपये परत केले. तर त्याने किती कर्ज घेतले होते ?

$$\text{व्याज} = \frac{\text{मुद्दल} \times \text{दर} \times \text{कालावधी}}{100}$$ हे सूत्र उदाहरण सोडवण्यासाठी चटकन वापरता येत नाही.

कारण व्याज व मुद्दल दोन्ही माहीत नाहीत; परंतु 100 रुपये मुद्दलावर 5 वर्षांत 45 रुपये व्याज होते. म्हणून 100 + 45 = 145 रुपये रास होते. आता मुद्दल व रास यांचे गुणोत्तर दोन प्रकारे मांडून समीकरण मिळवू.

उन्मेशचे मुद्दल म असेल तर $\frac{\text{म}}{17400} = \frac{100}{145}$

$\therefore$ म $= \frac{100 \times 17400}{145} = 12000$

$\therefore$ उन्मेशचे कर्ज 12000 रुपये होते.

चला, चर्चा करूया.

- सूत्र वापरून नवीन प्रकारचे समीकरण मांडून हे उदाहरण सोडवता येईल का ?

सरावसंच 41

1. 1700 रुपयांचे, द.सा.द.शे. काही दराने, 2 वर्षांचे व्याज 340 रुपये येते, तर व्याजाचा दर शे ....असेल.
   (i) 12 % (ii) 15 % (iii) 4 % (iv) 10 %
2. 3000 रुपयांचे विशिष्ट दराचे, विशिष्ट वर्षांचे व्याज 600 रुपये येते; तर 1500 रुपयांचे तितक्याच दराचे तितक्याच वर्षांचे व्याज किती रुपये येईल ?
   (i) 300 रुपये (ii) 1000 रुपये (iii) 700 रुपये (iv) 500 रुपये
3. जावेदने 12000 रुपये द.सा.द.शे. 9 दराने काही वर्षांसाठी बँकेत ठेवले. तो दरवर्षी व्याजाची रक्कम काढून घेई. किती वर्षांत त्याला व्याजासह एकूण 17400 रुपये मिळतील?

4*. लताबेन यांनी गृहोद्योग सुरू करण्यासाठी बँकेतून काही रक्कम द.सा.द.शे. 10 दराने $2\frac{1}{2}$ वर्षांसाठी कर्जाऊ. घेतली. त्यांनी कर्ज फेडण्यासाठी एकूण 10250 रुपये व्याज दिले, तर त्यांनी एकूण किती रक्कम कर्जाऊ घेतली होती ?

5. खालील सारणीतील रिकाम्या जागा भरा.

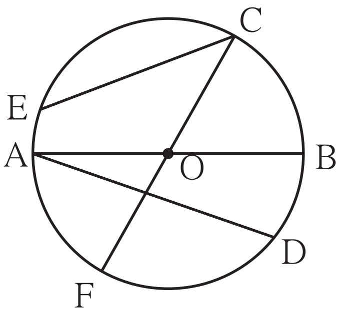
	मुद्दल	व्याजाचा दर (द.सा.द.शे.)	मुदत (काळ)	व्याज	रास
(i)	4200	7%	3 वर्षे	......	......
(ii)	......	6%	4 वर्षे	1200	......
(iii)	8000	5%	......	800	......
(iv)	......	5%	......	6000	18000
(v)	......	$2\frac{1}{2}$ %	5 वर्षे	2400	......

उपक्रम : ✸ विविध बँकांना प्रत्यक्ष भेट द्या व त्यांच्या विविध खात्यांवर दिले जाणारे व्याज जाणून घ्या.

✸ शाळेमध्ये शिक्षकांच्या मदतीने संचयिका (बचत बँक) तयार करा. त्यात खाते उघडून आर्थिक बचत करा.

11 वर्तुळ

जरा आठवूया.



- शेजारील वर्तुळातील त्रिज्या, जीवा व व्यास ओळखा व त्यांची नावे खालील सारणीत लिहा.

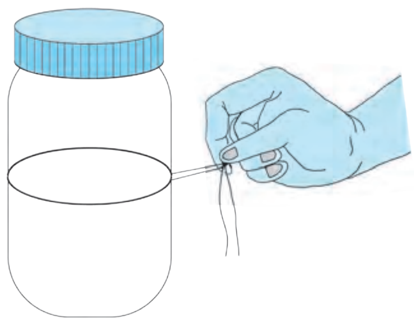
त्रिज्या				
जीवा				
व्यास				

वर्तुळाचा परीघ (Circumference of a circle)

कृती I पाण्याची दंडगोलाकृती बाटली कागदावर ठेवून तळाभोवती वर्तुळ काढा. दोऱ्याच्या साहाय्याने वर्तुळाचा परीघ मोजा.

कृती II बांगडीचा परीघ दोऱ्याने मोजा.

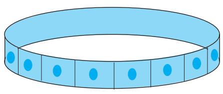
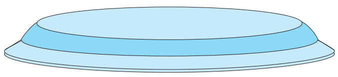
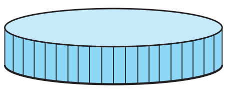
कृती III कोणत्याही एका वर्तुळाकार वस्तूचा दोऱ्याच्या साहाय्याने परीघ मोजा.



जाणून घेऊया.

परीघ व व्यास संबंध

कृती I खाली दिलेल्या वस्तूंचे परीघ व व्यास मोजून परिघाचे व्यासाशी असणारे गुणोत्तर सारणीत लिहा.

अ. क्र.	वस्तू	परीघ	व्यास	परिघाचे व्यासाशी गुणोत्तर
1.	 बांगडी	19 सेमी	6 सेमी	$\frac{19}{6} = 3.16$
2.	वर्तुळाकार पालथी थाळी 	....	....	....
3.	 बरणीचे झाकण	....	....	....

सारणीवरून परिघाचे व्यासाशी असलेले गुणोत्तर तपासा. आपणांस काय आढळून येते ?

कोणत्याही वर्तुळाच्या परिघाचे त्याच्या व्यासाशी असणारे गुणोत्तर तिपटीपेक्षा किंचित जास्त असून जवळपास स्थिर असते. ही स्थिर संख्या π (पाय) या ग्रीक वर्णाक्षराने दर्शवली जाते. ही संख्या परिमेय संख्या नाही हे थोर गणितज्ज्ञांनी परिश्रमाने सिद्ध केले आहे. व्यवहारामध्ये π ची किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 अशी घेतली जाते. उदाहरणात π ची किंमत दिली नसेल तर ती $\frac{22}{7}$ असे गृहीत धरतात.

त्रिज्या 'r', व्यास 'd' व परीघ 'c' असल्यास $\frac{\text{परीघ (c)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi$ म्हणजेच $\boxed{c = \pi d}$

पण $d = 2r$ $\therefore c = \pi \times 2r$ म्हणजेच $\boxed{c = 2\pi r}$

उदा. एका वर्तुळाचा व्यास 14 सेमी आहे, तर त्याचा परीघ काढा.

उकल : वर्तुळाचा व्यास : $d = 14$ सेमी

वर्तुळाचा परीघ $= \pi d$

$c = \frac{22}{7} \times 14$

$\therefore$ वर्तुळाचा परीघ = 44 सेमी

उदा. एका वर्तुळाची त्रिज्या 35 सेमी आहे, तर त्याचा परीघ काढा.

उकल : वर्तुळाची त्रिज्या : $r = 35$ सेमी

वर्तुळाचा परीघ $= 2\pi r$

$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 35$

$\therefore$ वर्तुळाचा परीघ = 220 सेमी

उदा. एका वर्तुळाचा परीघ 198 सेमी आहे, तर त्याची त्रिज्या व व्यास काढा.

उकल : वर्तुळाचा परीघ, $c = 2\pi r$

$$198 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$r = 198 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$$

त्रिज्या = 31.5 सेमी

$\therefore$ व्यास $= 2 \times 31.5 = 63$ सेमी

उदा. एका वर्तुळाचा परीघ 62.80 सेमी आहे. $\pi = 3.14$ घेऊन वर्तुळाचा व्यास काढा.

उकल : वर्तुळाचा परीघ, $c = \pi d$

$$62.80 = 3.14 \times d$$

$$\frac{62.80}{3.14} = d$$

$$20 = d$$

$\therefore$ व्यास = 20 सेमी

उदा. एका वर्तुळाकार जागेची त्रिज्या 7.7 मीटर आहे. त्या जागेस तीन पदरी तारेचे कुंपण घालण्यासाठी प्रतिमीटर 50 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?

उकल : वर्तुळाकार जागेचा परीघ $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7.7 = 48.4$

एकपदरी कुंपण घालण्यासाठी लागणाऱ्या तारेची लांबी = 48.4 मी

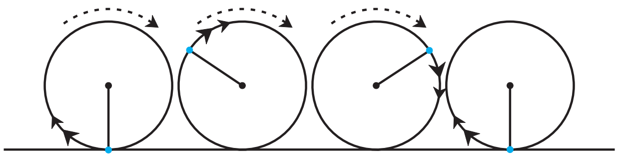
एकपदरी कुंपणाचा खर्च = तारेची लांबी $\times$ प्रतिमीटर दर

$= 48.4 \times 50$

$= 2420$ रुपये

$\therefore$ तीनपदरी कुंपणाचा खर्च $= 3 \times 2420 = 7260$ रुपये

उदा. एका बसच्या चाकाचा व्यास 0.7 मी आहे. दोन गावांमधील 22 किमी अंतर पूर्ण करण्यासाठी चाकाचे किती फेरे होतील ?



उकल : चाकाचा परीघ $= \pi d$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7$$

$$= 2.2 \text{ मी}$$

सजातीय राशींचे गुणोत्तर काढताना त्यांची एकके समान असावी लागतात.

22 किमी = 22 × 1000 = 22000 मीटर

म्हणजे चाकाचा एक फेरा पूर्ण झाला की 2.2 मी. अंतर पार होते. (1 फेरा = 1 परीघ)

$$\text{चाकाचे एकूण फेरे} = \frac{\text{अंतर}}{\text{परीघ}} = \frac{22000}{2.2} = \frac{220000}{22} = 10000$$

22 किमी अंतर पूर्ण करण्यासाठी बसच्या चाकाचे 10000 फेरे होतील.

सरावसंच 42

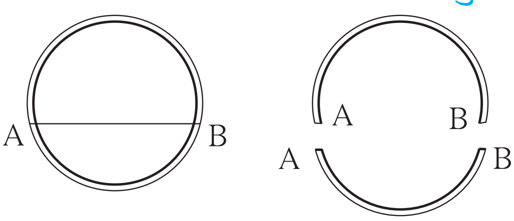
1. खालील सारणी पूर्ण करा.

अ.क्र.	त्रिज्या (r)	व्यास (d)	परीघ (c)
(i)	7 सेमी	....	....
(ii)	....	28 सेमी	....
(iii)	....	....	616 सेमी
(iv)	....	....	72.6 सेमी

2. एका वर्तुळाचा परीघ 176 सेमी आहे. तर त्याची त्रिज्या काढा.
3. एका वर्तुळाकार बागेची त्रिज्या 56 मीटर आहे. बागेभोवती तारेचे चार पदरी कुंपण घालण्यासाठी प्रतिमीटर 40 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?
4. एका बैलगाडीच्या चाकाचा व्यास 1.4 मीटर आहे. त्या बैलगाडीला 1.1 किलोमीटर अंतर पूर्ण करण्यासाठी तिच्या चाकाचे किती फेरे होतील ?

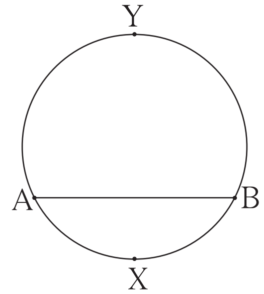
जरा आठवूया.

वर्तुळकंस (Arc of the circle)

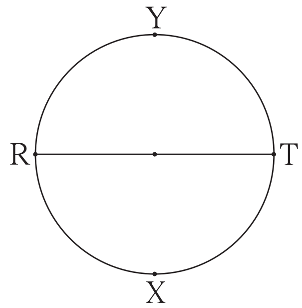


बाजूला एक प्लॅस्टिकची वर्तुळाकार बांगडी दाखवली आहे. समजा ही बांगडी A व B बिंदूपाशी तुटली, तर चित्रातील बांगडीच्या प्रत्येक तुकड्याला वर्तुळाच्या संदर्भात काय म्हणतात ?

जाणून घेऊया.



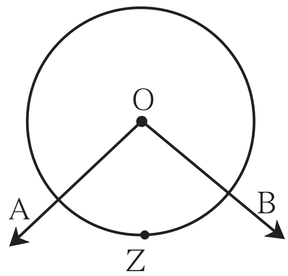
सोबतच्या आकृतीमध्ये जीवा AB मुळे वर्तुळाचे दोन भाग झाले आहेत. त्यांपैकी कंस AXB हा लहान आहे, त्याला **लघुकंस** म्हणतात आणि कंस AYB हा मोठा आहे, त्याला **विशालकंस** म्हणतात. लघुकंस AXB हा कंस AB असाही लिहितात.



ज्या दोन वर्तुळकंसांचे अंत्यबिंदू सामाईक असतात आणि ते दोन वर्तुळकंस मिळून वर्तुळ पूर्ण होते, ते कंस एकमेकांचे संगतकंस असतात. येथे कंस AYB व कंस AXB हे एकमेकांचे संगतकंस आहेत.

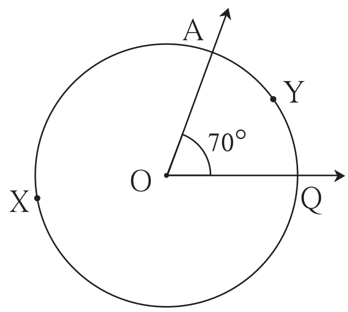
सोबतच्या आकृतीमध्ये जीवा RT हा वर्तुळाचा व्यास आहे. व्यासामुळे वर्तुळाचे दोन्ही कंस समान होतात. त्यांना **अर्धवर्तुळकंस** म्हणतात, हे ध्यानात घ्या.

केंद्रीय कोन व कंसाचे माप (Central angle and Measure of an arc)



सोबतच्या आकृतीमध्ये, वर्तुळकेंद्र 'O' हा $\angle AOB$ चा शिरोबिंदू आहे. वर्तुळाचा केंद्रबिंदू हा ज्या कोनाचा शिरोबिंदू असतो. त्या कोनाला **केंद्रीय कोन** म्हणतात. आकृतीतील $\angle AOB$ हा कंस AZB शी निगडित केंद्रीय कोन आहे. **वर्तुळ कंसाने केलेल्या केंद्रीय कोनाचे माप हे त्या कंसाचे माप मानले जाते.**

✸ **लघुकंसाचे माप**

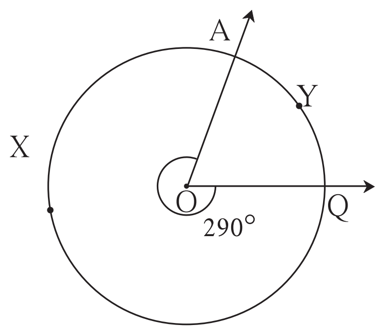


शेजारील आकृतीमध्ये $\angle AOQ$ या केंद्रीय कोनाचे माप 70° आहे.

$\therefore$ लघुकंस AYQ चे माप 70° आहे.

$\therefore$ m(कंस AYQ) $= 70^\circ$ असे लिहितात.

✸ **विशालकंसाचे माप**



विशालकंसाचे माप $= 360^\circ -$ संगत लघुकंसाचे माप

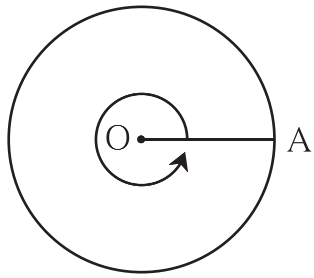
$\therefore$ आकृतीतील विशालकंस AXQ चे माप

$360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$ आहे.

✱ वर्तुळाचे माप

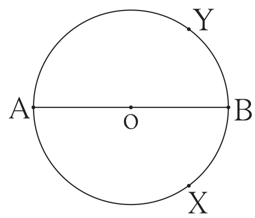
आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळाची OA ही त्रिज्या घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने पूर्ण कोनातून फिरते. त्या वेळी होणारा कोन 360°मापाचा आहे. तिचे A हे टोक एक वर्तुळ पूर्ण करते. वर्तुळाने केलेला केंद्रीय कोन 360°आहे.

$\therefore$ पूर्ण वर्तुळाचे माप 360° असते.



✱ अर्धवर्तुळकंसाचे माप

आता, आकृतीवरून अर्धवर्तुळ कंस AXB व अर्धवर्तुळकंस AYB यांची मापे ठरवा.



हे मला समजले.

- लघुकंसाचे माप हे त्याच्या संबंधित केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.
- विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप
- अर्धवर्तुळकंसाचे माप 180° असते.

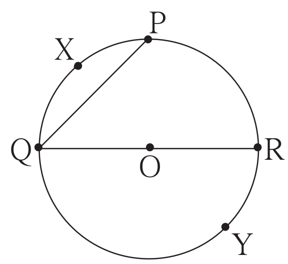
सरावसंच 43

1. अचूक पर्याय निवडा.

   जर कंस AXB व कंस AYB हे एकमेकांचे संगतकंस असतील आणि m(कंस AXB) = 120° तर m(कंस AYB) = किती ?

   (i) 140° (ii) 60° (iii) 240° (iv) 160°

2. 'O' केंद्र असलेल्या वर्तुळात काही कंस दाखवले आहेत. त्यांपैकी वर्तुळामधील लघुकंस, विशालकंस व अर्धवर्तुळकंस यांची नावे लिहा.



3. O केंद्र असलेल्या वर्तुळात लघुकंस PXQ चे माप 110° आहे, तर विशालकंस PYQ चे माप काढा.

ICT Tools or Links

Geogebra Software चा उपयोग करून केंद्रीय कोन आणि कंसाची विविध मापे यांचा सहसंबंध move option चा उपयोग करून अनुभवा.

12 परिमिती व क्षेत्रफळ

जरा आठवूया.

परिमिती (Perimeter)

बंदिस्त आकृतीच्या सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज म्हणजे त्या आकृतीची परिमिती असते.

बहुभुजाकृतीची परिमिती = तिच्या सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज.

$\therefore$ चौरसाची परिमिती = 4 $\times$ बाजू

a बाजू असलेल्या चौरसाची परिमिती = $4a$

आयताची परिमिती = 2 लांबी + 2 रुंदी

लांबी l आणि रुंदी b असलेल्या आयताची परिमिती= $2l + 2b$

उदा. एका आयताची परिमिती 64 सेमी आहे. त्याची लांबी 17 सेमी असेल, तर रुंदी किती असेल ?

उकल : आयताची रुंदी x सेमी मानू.

2 लांबी + 2 रुंदी = परिमिती

2 (लांबी + रुंदी) = 64

$2\,(17 + x) = 64$

$$\frac{2(17+x)}{2} = \frac{64}{2}$$

$17 + x = 32$

$x = 15$

आयताची रुंदी 15 सेमी आहे.

उदा. लांबी 28 सेमी व रुंदी 20 सेमी असलेल्या एका आयताची परिमिती एका चौरसाच्या परिमिती एवढी आहे. तर त्या चौरसाची बाजू किती ?

उकल : आयताची परिमिती = 2 (लांबी + रुंदी)

$= 2\,(28 + 20)$

$= 96$

चौरसाची बाजू a असेल तर $4a = 96$

चौरसाची परिमिती = 96

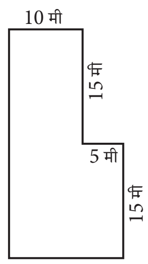
$4a = 96$

$$\therefore\ a = \frac{96}{4} = 24$$

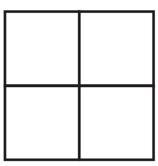
चौरसाची बाजू 24 सेमी आहे.

सरावसंच 44

1. एका आयताची लांबी व रुंदी दुप्पट केली, तर त्या आयताची परिमिती मूळ आयताच्या परिमितीच्या किती पट होईल ?
2. एका चौरसाची बाजू तिप्पट केली, तर त्याची परिमिती मूळ चौरसाच्या परिमितीच्या किती पट होईल?



3. शेजारी मैदानाची आकृती दिली आहे. त्यामध्ये बाजूंच्या लांबींची मापे दिली आहेत. त्यावरून मैदानाची परिमिती काढा.



4. एक मीटर लांबीचा चौरसाकृती कापडाचा तुकडा घेऊन आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे चार समान आकारांचे रुमाल केले. सर्व रुमालांना बाजूने लेस लावण्यासाठी किती लांबीची लेस लागेल ?

जरा आठवूया.

क्षेत्रफळ (Area)

- चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू = $(\text{बाजू})^2$
- आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी = $l \times b$

क्षेत्रफळ हे चौरस मीटर, चौरस सेमी, चौरस किमी इत्यादी एककांत मोजतात.

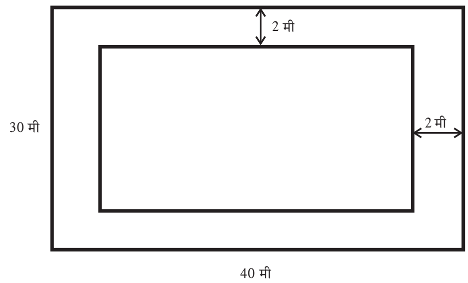
कृती I

खो-खो, कबड्डी या खेळांसाठी आखलेली पटांगणे, टेनिस कोर्ट, बॅडमिंटन कोर्ट यांपैकी शक्य असेल त्यांची लांबी व रुंदी मोजा. परिमिती व क्षेत्रफळे काढा.

कृती II

अनिरुद्धच्या घराच्या एका भिंतीला नवा रंग द्यायचा आहे. भिंतीची लांबी 7 मीटर व उंची 5 मीटर आहे. रंगाऱ्याने रंग देण्याचा दर प्रतिचौरस मीटर 120 रुपये सांगितला, तर त्याला रंगाऱ्याला किती रुपये द्यावे लागतील हे ठरवा.

उदा. एका 40 मीटर लांब व 30 मीटर रुंद अशा एका आयताकृती बागेच्या आत कुंपणालगत बागेभोवती 2 मीटर रुंदीचा रस्ता करायचा आहे. त्या रस्त्यावर 25 सेमी × 20 सेमी आकाराच्या फरश्या बसवायच्या आहेत तर अश्या किती फरश्या आणाव्या लागतील ?



फरश्या बसवण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ काढू.

बागेचे क्षेत्रफळ = 40 × 30 = 1200 चौमी

रस्ता सोडून आतील बागेचे क्षेत्रफळ = 36 × 26 = 936 चौमी

∴ फरश्या बसवण्याचा भाग = 1200 − 936 = 264 चौमी

प्रत्येक फरशीचे क्षेत्रफळ $= \frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{20}$ चौमी

100 सेमी = 1 मी
25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी

एका फरशीचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{20}$ चौमी तर 264 चौमी जागेत बसणाऱ्या फरश्यांची संख्या काढू.

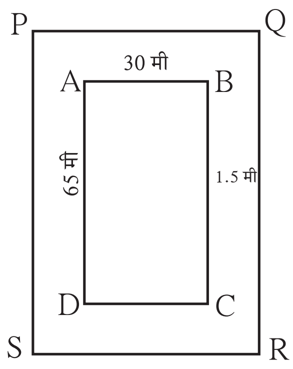
$$\text{फरश्यांची संख्या} = \frac{\text{जागेचे एकूण क्षेत्रफळ}}{\text{एका फरशीचे क्षेत्रफळ}}$$

$$= 264 \div \frac{1}{20}$$

$$= 264 \times 20 = 5280$$

म्हणून 5280 फरश्या आणाव्या लागतील.

उदा. एका आयताकृती क्रीडांगणाची लांबी 65 मीटर व रुंदी 30 मीटर आहे. त्या क्रीडांगणालगत बाहेरून चारही बाजूंना 1.5 मीटर रुंदीचा रस्ता आहे. त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



उकल : उदाहरणात क्रीडांगणाचा आकार आयताकृती आहे.

समजा $\square$ ABCD हे क्रीडांगण आहे. त्याभोवती 1.5 मीटर रुंदीचा रस्ता आहे.

$\square$ ABCD च्या सर्व बाजूंनी 1.5 मीटर अंतर ठेवल्यावर $\square$ PQRS हा आयत मिळतो.

आयत PQRS ची लांबी = 65 + 1.5 + 1.5 = 68 मीटर

आयत PQRS ची रुंदी = 30 + 1.5 + 1.5 = 33 मीटर

रस्त्याचे क्षेत्रफळ = आयत PQRS चे क्षेत्रफळ – आयत ABCD चे क्षेत्रफळ

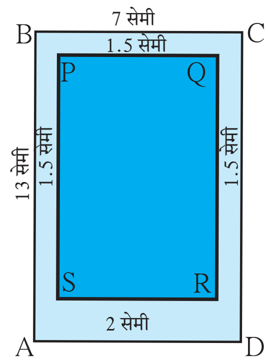
= 68 × 33 – 65 × 30 = $\boxed{}$ – $\boxed{}$ = $\boxed{}$ चौरस मीटर

चला, चर्चा करूया.

- वरील उदाहरणातील रस्त्याचे क्षेत्रफळ वेगळ्या रितीने काढता येईल का ?

उदा. एका मोबाइलची लांबी 13 सेमी व रुंदी 7 सेमी आहे. त्यावरील PQRS हा स्क्रीन आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आहे.तर स्क्रीनचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल: मोबाइलच्या कडांनी तयार झालेला आयत ABCD मानू. त्याची लांबी 13 सेमी व रुंदी 7 सेमी आहे. AB, BC व DC च्या बाजूने 1.5 सेमी अंतर सोडले व DA च्या बाजूने 2 सेमी अंतर सोडले तर तयार होणारा आयत PQRS मानू.



आयत PQRS ची लांबी = $\boxed{}$ सेमी

आयत PQRS ची रुंदी= $\boxed{}$ सेमी

स्क्रीनचे क्षेत्रफळ = आयत PQRS चे क्षेत्रफळ = ... × .... = $\boxed{}$ चौसेमी

कृती

वेगवेगळ्या आकारांचे मोबाइल पाहा. त्यांच्यावर बसवलेल्या स्क्रीनचे क्षेत्रफळ काढा.

सरावसंच 45

1. एका चौरसाची बाजू 12 सेमी असल्यास, त्या चौरसाचे क्षेत्रफळ काढा.
2. एका आयताची लांबी 15 सेमी आणि रुंदी 5 सेमी असल्यास त्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.
3. एका आयताचे क्षेत्रफळ 102 चौसेमी आहे. आयताची लांबी 17 सेमी आहे, तर आयताची परिमिती किती?

4*. एका चौरसाची बाजू तिप्पट केली तर, त्याचे क्षेत्रफळ मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या किती पट होईल ?

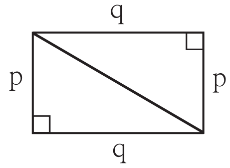
जाणून घेऊया.

काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (Area of right angled triangle)

कृती एकाच मापाचे दोन काटकोन त्रिकोण कापून घ्या. ते आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे जोडा. एक आयत तयार होतो हे अनुभवा. त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या बाजू p व q या लांबीच्या आहेत व आयताच्याही त्याच बाजू आहेत. आकृतीवरून दिसते की, आयताचे क्षेत्रफळ = 2 × काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

$\therefore$ 2 × काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $p \times q$

$\therefore$ काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\dfrac{p \times q}{2}$



हे मला समजले.

- काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\dfrac{1}{2}$ × काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या लांबीचा गुणाकार

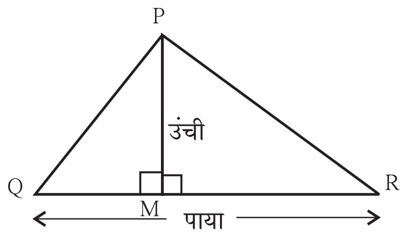
काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या दोन भुजांपैकी एक भुजा पायासाठी मानली तर काटकोन करणारी दुसरी भुजा या वेळी उंची असते.

काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\dfrac{1}{2}$ पाया × उंची

ΔABC हा कोणताही त्रिकोण असेल तर पायासाठी कोणतीही एक बाजू घेतात. त्या बाजूच्या समोरील शिरोबिंदूपासून पायावर टाकलेल्या लंबाचे माप ही त्या त्रिकोणाची उंची असते.

ΔPQR या कोणत्याही त्रिकोणात QR हा पाया घेतला. P पासून QR या पायावर PM हा लंब काढला.

आकृती 1: बिंदू M, रेख QR वर आहे.



ΔPMR व ΔPMQ काटकोन त्रिकोण आहेत.

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMQ) + A(\Delta PMR)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QM) \times l(PM) + \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM)$

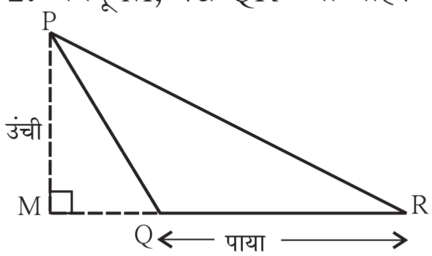
$= \dfrac{1}{2} [l(QM) + l(MR)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} l(QR) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}$ × पाया × उंची

$A(\Delta PQR) = \dfrac{1}{2}$ × पाया × उंची

आकृती 2: बिंदू M, रेख QR च्या बाहेर आहे.



ΔPMR व ΔPMQ काटकोन त्रिकोण आहेत.

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMR) - A(\Delta PMQ)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM) - \dfrac{1}{2} \times l(MQ) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} [l(MR) - l(MQ)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QR) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}$ × पाया × उंची

$A(\Delta PQR) = \dfrac{1}{2}$ × पाया × उंची

हे मला समजले.

$$\text{त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2} \times \text{पाया} \times \text{उंची}$$

उदा. एका काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या बाजू 3.5 सेमी व 4.2 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल: काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या लांबीचा गुणाकार

$= \frac{1}{2} \times 3.5 \times 4.2$

$= 7.35$ चौसेमी

उदा. एका त्रिकोणाचा पाया 5.6 सेमी व उंची 4.5 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल: त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

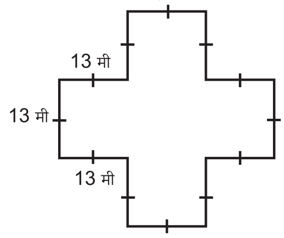
$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 4.5$

$= 12.6$ सेमी^{2}

(चौसेमी हे सेमी^{2} असेही लिहितात.)

सरावसंच 46

1. एका दिनदर्शिकेच्या पानाची लांबी 45 सेमी व रुंदी 26 सेमी आहे, तर त्या पानाचे क्षेत्रफळ किती ?
2. एका त्रिकोणाची उंची 3.6 सेमी व पाया 4.8 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?
3. एका आयताकृती भूखंडाची लांबी 75.5 मीटर व रुंदी 30.5 मीटर आहे. त्याचा दर 1000 रुपये चौरस मीटर असल्यास, त्या भूखंडाची किंमत किती ?
4. आयताकृती सभागृहाची लांबी 12 मीटर व रुंदी 6 मीटर आहे. या खोलीत 30 सेमी बाजू असलेल्या चौरसाकृती फरश्या बसवायच्या आहेत; तर संपूर्ण सभागृहात किती फरश्या बसतील ? या उदाहरणातील चौरसाकृती फरश्या 15 सेमी बाजूच्या घेतल्या तर किती फरश्या लागतील ?
5. शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे मापे असलेल्या बागेची परिमिती व क्षेत्रफळ काढा.

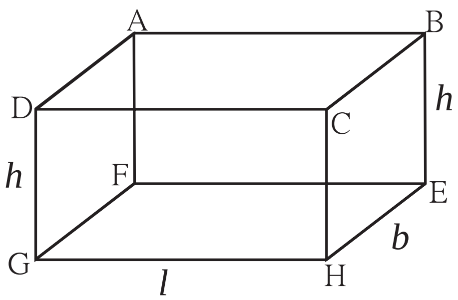


जाणून घेऊया.

पृष्ठफळ (Surface area)

कोणत्याही त्रिमितीय वस्तूच्या सर्व पृष्ठभागांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज म्हणजे त्या वस्तूचे पृष्ठफळ असते.

✸ इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ



- इष्टिकाचितीला सहा पृष्ठे असतात.
- प्रत्येक पृष्ठ आयताकार असते.
- समोरासमोरील आयताकार पृष्ठांचे क्षेत्रफळ समान असते.
- प्रत्येक कड तिला जोडणाऱ्या इतर दोन कडांना लंब असते.
- इष्टिकाचितीच्या आडव्या पृष्ठाची लांबी l ने व रुंदी b ने दाखवू. उभ्या पृष्ठांची उंची h ने दाखवू.

आयत ABCD चे क्षेत्रफळ = आयत GHEF चे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रुंदी = $l \times b$

आयत ADGF चे क्षेत्रफळ = आयत BCHE चे क्षेत्रफळ = रुंदी $\times$ उंची = $b \times h$

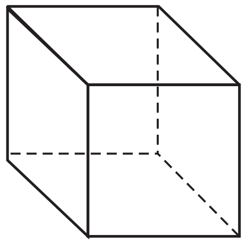
आयत CHGD चे क्षेत्रफळ = आयत ABEF चे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ उंची = $l \times h$

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ = सर्व आयतांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ = 2 (लांबी $\times$ रुंदी + रुंदी $\times$ उंची + लांबी $\times$ उंची)

$= 2\,(l \times b + b \times h + l \times h) = 2\,(lb + bh + lh)$

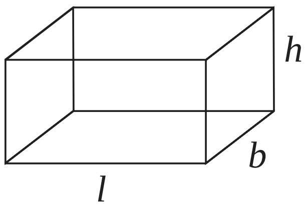
✸ घनाचे पृष्ठफळ



- घनाला 6 पृष्ठे असतात.
- प्रत्येक पृष्ठ चौरसाकार असते.
- सर्व पृष्ठांचे क्षेत्रफळ समान असते.
- चौरसाची बाजू l मानू.
- घनाच्या एका पृष्ठाचे क्षेत्रफळ = चौरसाचे क्षेत्रफळ
- घनाचे एकूण पृष्ठफळ = 6 चौरसांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज
  = 6 $\times$ बाजू^{2}
  $= 6 \times l^2$

उदा. लांबी 1.5 मीटर, रुंदी 1.2 मीटर व उंची 1.3 मीटर अशी मापे असलेली पत्र्याची इष्टिकाचिती आकाराची बंद पेटी तयार करायची असल्यास त्यास किती पत्रा लागेल ?

उकल : पेटीची लांबी = l = 1.5 मीटर, रुंदी = b = 1.2 मीटर, उंची = h = 1.3 मीटर



पेटीचे पृष्ठफळ $= 2\,(l \times b + b \times h + l \times h)$

$= 2\,(1.5 \times 1.2 + 1.2 \times 1.3 + 1.5 \times 1.3)$

$= 2\,(1.80 + 1.56 + 1.95)$

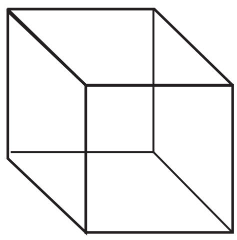
$= 2\,(5.31)$

= 10.62 चौमी.

पेटी तयार करण्यासाठी एकूण 10.62 चौमी पत्रा लागेल.

उदा. एका घनाकृती पेटीची बाजू 0.4 मी आहे. त्या पेटीला बाहेरून रंग देण्यासाठी दर चौरस मीटरला 50 रुपये प्रमाणे किती खर्च येईल ?

उकल : बाजू = l = 0.4 मीटर



घनाचे एकूण पृष्ठफळ $= 6 \times (l)^2$

$= 6 \times (0.4)^2$

$= 6 \times 0.16 = 0.96$ चौमी

1 चौमी रंगवण्याचा खर्च 50 रुपये.

$\therefore$ 0.96 चौमी रंगवण्याचा खर्च = 0.96×50

= 48 रुपये

पेटी रंगवण्यासाठी 48 रूपये खर्च येईल.

सरावसंच 47

1. घनाच्या बाजू खालीलप्रमाणे असल्यास त्यांचे एकूण पृष्ठफळ काढा.

   (i) 3 सेमी (ii) 5 सेमी (iii) 7.2 मी (iv) 6.8 मी (v) 5.5 मी

2. खाली इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे दिलेली आहे, त्यावरून त्यांचे एकूण पृष्ठफळ काढा.

   (i) 12 सेमी, 10 सेमी, 5 सेमी. (ii) 5 सेमी, 3.5 सेमी, 1.4 सेमी.

   (iii) 2.5 सेमी, 2 मी, 2.4 मी. (iv) 8 मी, 5 मी, 3.5 मी.

3. एका आगपेटीची लांबी 4 सेमी, रुंदी 2.5 सेमी व उंची 1.5 सेमी आहे. त्या आगपेटीला बाहेरून रंगीत कागद तंतोतंत चिकटवायचा आहे, तर एकूण किती कागद लागेल ?

4. बागेतला पालापाचोळा ट्रॉलीवरून वाहून नेण्यासाठी झाकण नसलेली पत्र्याची पेटी तयार करायची आहे. तिची लांबी 1.5 मीटर, रुंदी 1 मीटर व उंची 1 मीटर आहे. त्यासाठी एकूण किती पत्रा लागेल ? ती पेटी आतून व बाहेरून गंजविरोधक रंगाने रंगवायची आहे, तर 150 रुपये प्रतिचौरस मीटरप्रमाणे ती पेटी रंगवण्यास किती खर्च येईल ?

गणिती गंमत

काही तीन अंकी संख्या अशा असतात की, त्यातील अंकांचा जो गुणाकार येईल त्याने त्या संख्येस भाग जातो.

उदा. (i) 175 ही संख्या घ्या, $1 \times 7 \times 5 = 35$, $\frac{175}{35} = 5$

(ii) 816 ही संख्या घ्या, $8 \times 1 \times 6 = 48$, $\frac{816}{48} = 17$

(iii) 612 ही संख्या घ्या, $6 \times 1 \times 2 = 12$, $\frac{612}{12} = 51$

याप्रमाणे 135, 312,672 या सुद्धा संख्या आहेत.

अशा आणखी काही संख्या शोधा.

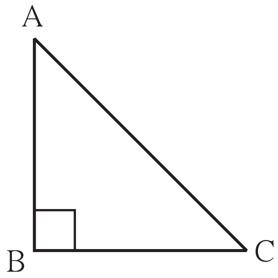
13 पायथागोरसचा सिद्धान्त

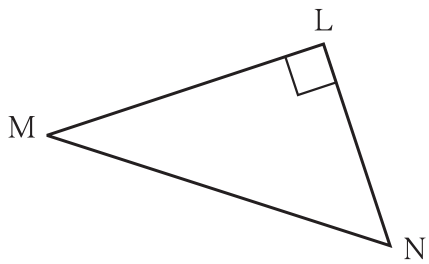
जरा आठवूया.

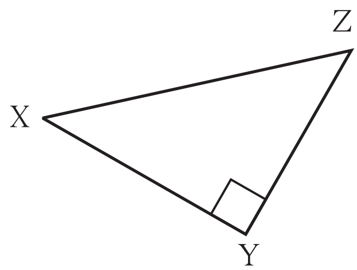
काटकोन त्रिकोण (Right angled triangle)

ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असतो, त्या त्रिकोणास काटकोन त्रिकोण म्हणतात आणि त्या काटकोनासमोरील बाजूला कर्ण म्हणतात, हे आपणांस माहीत आहे.

- खालील काटकोन त्रिकोणातील कर्णांची नावे लिहा.







ΔABC चा कर्ण ☐ ΔLMN चा कर्ण ☐ ΔXYZ चा कर्ण ☐

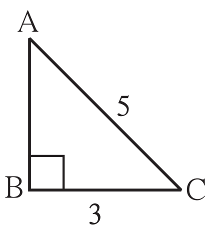
पायथागोरसचा सिद्धान्त (Theorem of Pythagoras)

पायथागोरस हा थोर ग्रीक गणिती ख्रिस्तपूर्व सहाव्या शतकात होऊन गेला. गणित विषयातील त्याचे योगदान खूप मोठे आहे. गणित शिकवण्याची त्याची हातोटी विलक्षण लोकप्रिय होती. त्याने अनेक शिष्य तयार केले.

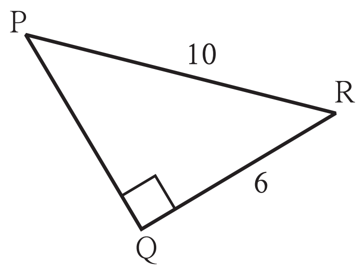
काटकोन त्रिकोणासंबंधीचा एक सिद्धान्त फार पूर्वीपासून अनेक देशांतील लोकांना माहीत होता. भारतातील शुल्वसूत्र या ग्रंथातही तो आहे. त्या सिद्धान्ताची सिद्धता पायथागोरसने प्रथम दिली म्हणून त्याचे नाव त्या सिद्धान्ताला दिले गेले. **काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.** हा तो पायथागोरसचा सिद्धान्त आहे.

कृती कर्ण आणि काटकोन करणारी एक भुजा दिली असता खालील कच्च्या आकृतीतील मापांप्रमाणे काटकोन त्रिकोण काढा. तिसऱ्या भुजेची लांबी मोजा. पायथागोरसच्या सिद्धान्ताचा पडताळा घ्या.

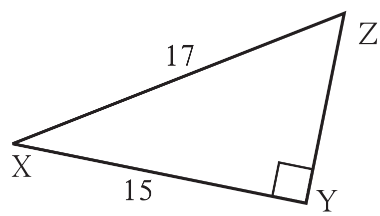
(i)



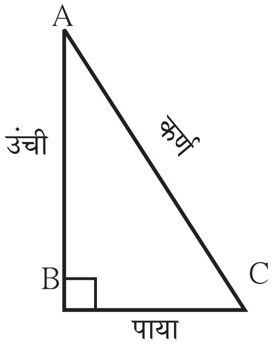
(ii)



(iii)



जाणून घेऊया.



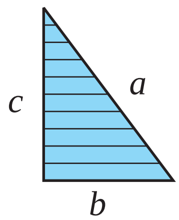
सोबतच्या आकृतीवरून, पायथागोरसचा सिद्धान्त खालीलप्रमाणे लिहितात. ΔABC मध्ये $\angle B$ काटकोन असेल तर,

$[l(AC)]^2 = [l(AB)]^2 + [l(BC)]^2$

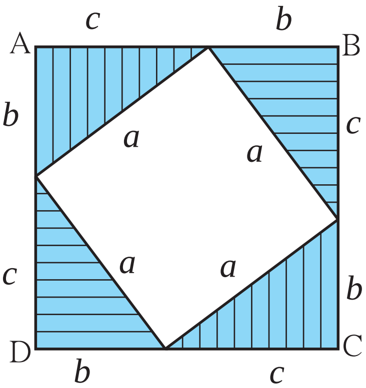
साधारणपणे काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूंपैकी एक बाजू पाया म्हणून घेतात व दुसरी बाजू उंची म्हणून घेतात. मग हा सिद्धान्त **(कर्ण)**^{2} = **(पाया)**^{2} + **(उंची)**^{2}. असा लिहितात.

पायथागोरसच्या **सिद्धान्ताचा पडताळा** घेण्यासाठी खालील कृती करा.

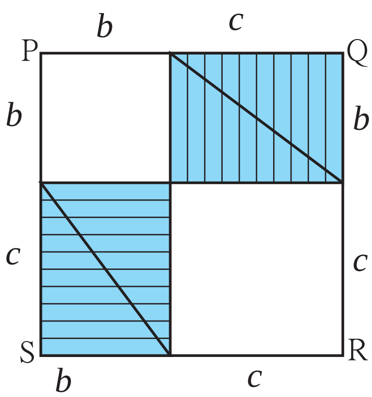
कृती एका कार्डशीटचे समान मापाचे 8 काटकोन त्रिकोण कापा. त्याच्या भुजा कोणत्याही लांबीच्या असू शकतात. त्या त्रिकोणाचा कर्ण 'a' एकक, काटकोन करणाऱ्या बाजू 'b' एकक व 'c' एकक आहेत, असे मानू. त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{bc}{2}$ आहे, हे लक्षात घ्या.



आता वेगळ्या कार्डशीटवर (b + c) एकक बाजू असणारे दोन चौरस पेन्सिलने काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आधी कापलेल्या 8 त्रिकोणांपैकी 4 त्रिकोण चौरस ABCD मध्ये ठेवा आणि राहिलेले 4 त्रिकोण आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे चौरस PQRS मध्ये ठेवा. त्रिकोणांनी झाकलेले भाग रेखांकित करा.



आकृती (i)



आकृती (ii)

आकृत्यांचे निरीक्षण करा. आकृती (i) मध्ये रिकाम्या जागेत ज्याची बाजू 'a' आहे असा चौरस तयार झाला आहे. आकृती (ii) मध्ये रिकाम्या जागेत 'b' व 'c' बाजू असलेले दोन चौरस तयार झाले आहेत.
दोन्ही चौरसांमध्ये रेखांकित केलेला भाग समान म्हणजे चार काटकोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळाइतका आहे.

आकृती (i) मध्ये चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ = $a^2 + 4 \times$ काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2}\ bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

आकृती (ii) मध्ये चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ $= b^2 + c^2 + 4 \times$ काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ

$$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2}\ bc$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc$$

चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ = चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ

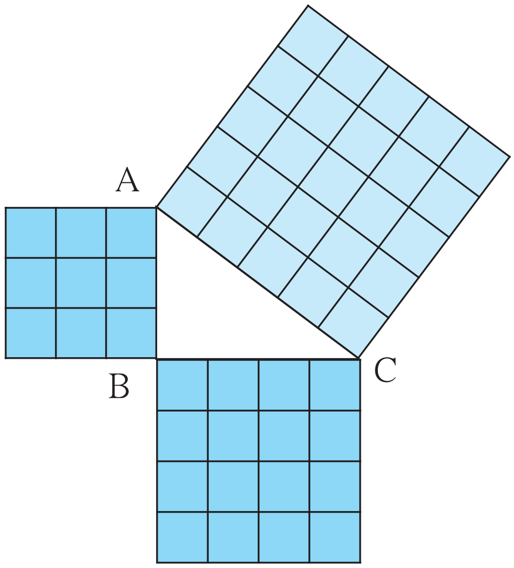
$$\therefore \quad a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

चला, चर्चा करूया.

- आकृती (i) मध्ये रिकाम्या चौकोनाचा प्रत्येक कोन काटकोन आहे, हे कोनमापकाशिवाय पडताळून पाहता येईल का ?

कृती एका कार्डशीटवर 3 सेमी, 4 सेमी व 5 सेमीच्या मापाचा एक काटकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक बाजूवर चौरसाची रचना करा. प्रत्येक चौरसाचे क्षेत्रफळ काढून पायथागोरसच्या सिद्धान्ताचा पडताळा घ्या.



पायथागोरसचा सिद्धान्त वापरून काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू दिल्यास तिसरी बाजू काढता येते.

उदा. ΔABC मध्ये $\angle C = 90^\circ$, $l(AC) = 5$ सेमी आणि $l(BC) = 12$ सेमी, तर $l(AB) =$ किती?

उकल : काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये $\angle C = 90^\circ$ म्हणून बाजू AB हा कर्ण आहे. पायथागोरस सिद्धान्तानुसार,

$$l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

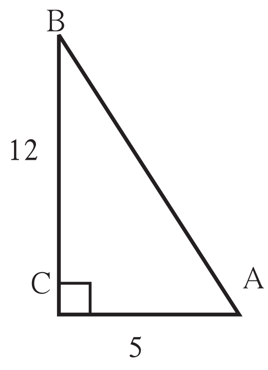
$$= 25 + 144$$

$$\therefore l(AB)^2 = 169$$

$$\therefore l(AB)^2 = 13^2$$

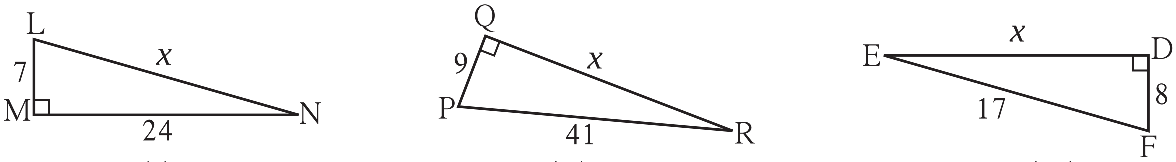
$$\therefore l(AB) = 13$$

$\therefore$ रेख AB ची लांबी = 13 सेमी



सरावसंच 48

1. खालील आकृत्या पाहा व 'x' ची किंमत काढा.



(i) (ii) (iii)

2. काटकोन ΔPQR मध्ये $\angle P = 90°$ जर $l(PQ) = 24$ सेमी आणि $l(PR) = 10$ सेमी, तर रेख QR ची लांबी काढा.
3. काटकोन ΔLMN मध्ये $\angle M = 90°$ जर $l(LM) = 12$ सेमी आणि $l(LN) = 20$ सेमी, तर रेख MN ची लांबी काढा.
4. 15 मी लांबीची एक शिडी जमिनीपासून 9 मीटर उंचीवरील एका खिडकीपाशी पोहचते, तर भिंतीचा पाया व शिडीचे खालचे टोक यांमधील अंतर काढा.

जाणून घेऊया.

नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर त्याला **पायथागोरसचे त्रिकुट** म्हणतात. ज्या त्रिकोणाच्या भुजांची लांबी अशा त्रिकुटातील संख्यांनी दर्शवली जाते तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

उदा. (7,24,25) हा संख्या समूह पायथागोरसचे त्रिकुट आहे का ?

7, 24, 25 यातील प्रत्येक संख्येचा वर्ग करू.

$7^2 = 49,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625$

$\therefore 49 + 576 = 625$

$\therefore 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ 7, 24 व 25 हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

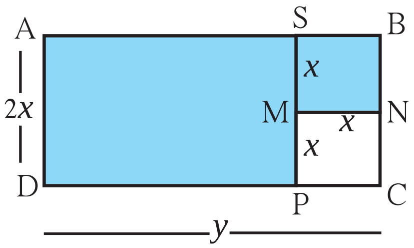
उपक्रम : 1 ते 50 या संख्यासमूहातील संख्या पाहा व त्यांमधील पायथागोरसची त्रिकुटे शोधा.

सरावसंच 49

1. पुढे काही त्रिकुटे दिली आहेत, त्यांतील पायथागोरसचे त्रिकुट ठरवा.
   (i) 3, 4, 5 (ii) 2, 4, 5
   (iii) 4, 5, 6 (iv) 2, 6, 7
   (v) 9, 40, 41 (vi) 4, 7, 8
2. खाली काही त्रिकोणांच्या बाजू दिल्या आहेत, त्यावरून कोणते त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहेत, ते ओळखा.
   (i) 8, 15, 17 (ii) 11, 12, 15 (iii) 11, 60, 61 (iv) 1.5, 1.6, 1.7
   (v) 40, 20, 30

14 बैजिक सूत्रे – वर्ग विस्तार

जरा आठवूया.



शेजारील आकृतीत आयत ABCD दाखवला आहे. या आयताची लांबी y एकक आहे व रुंदी $(2x)$ एकक आहे. या आयताकृती तुकड्यातून x एकक बाजू असलेला चौरस कापून घेतला. रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी बैजिक राशींवरील क्रियांचा वापर करता येईल.

आयत ABCD चे क्षेत्रफळ हे A($\square$ABCD) असे लिहू.

रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ = A($\square$ABCD) – A($\square$MNCP) = $2xy - x^2$

रंगीत भागाचे क्षेत्रफळ = A($\square$ASPD) + A($\square$SBNM) = $(y - x) \times 2x + x^2$

$= 2xy - 2x^2 + x^2$

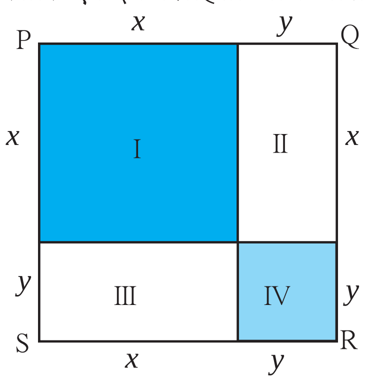
$= 2xy - x^2$

जाणून घेऊया.

वर्गविस्तार

बैजिक राशींचा गुणाकार करुन मिळालेली राशी ही त्या गुणाकाराचा विस्तार असतो. विशिष्ट प्रकारच्या राशींचे विस्तार एकदम लिहिता यावे यासाठी सूत्रे तयार केली जातात. त्यांपैकी काही सूत्रे आपण पाहू.

कृती I



- शेजारील आकृतीत $\square$PQRS या चौरसाची बाजू $(x + y)$ आहे.

$\therefore$ A ($\square$PQRS) = $(x + y)^2$

PQRS हा चौरस I, II, III, IV अशा आयतांमध्ये विभागला आहे.

PQRS या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे आयत I, II, III, IV यांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज आहे.

$\therefore$ A ($\square$PQRS) = A (आयत I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (आयत IV)

$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

आता $(x + y)^2$ हा बैजिक राशींचा गुणाकार करू.

$(x + y)\ (x + y) = x\ (x + y) + y\ (x + y)$

$= x^2 + xy + yx + y^2 \qquad \therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)$ या द्विपदीचा वर्ग करून आलेली बैजिक राशी ही क्षेत्रफळाच्या मापनावरून मिळालेल्या राशीएवढी आहे. $\therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ हे द्विपदीच्या वर्गविस्ताराचे सूत्र आहे.

कृती II शेजारील आकृतीत PQRS हा a बाजू असलेला चौरस असून त्याचे 4 आयतांत विभाजन केले आहे. जसे $(a - b)$ बाजूचा चौरस, b बाजूचा चौरस व $(a - b)$ आणि b बाजू असलेले 2 आयत.

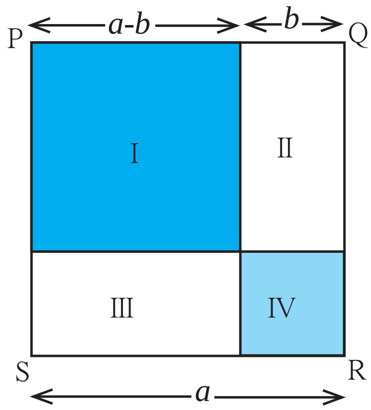
A (चौरस I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (चौरस IV) = A (□PQRS)

$(a - b)^2 + (a - b)\,b + (a - b)\,b + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$

$\therefore (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



बैजिक राशींचा गुणाकार करून सूत्र तयार करू.

$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$

$= a\,(a - b) - b\,(a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

हे मला समजले.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

वर्ग विस्तार सूत्रांमध्ये a आणि b साठी कोणत्याही संख्या घेतल्यास ते पडताळता येते.
जसे $a = 5$, $b = 3$ घेतल्यास.

$(a + b)^2 = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

$a^2 + 2ab + b^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 + 30 + 9 = 64$

$(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$

$a^2 - 2ab + b^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 - 30 + 9 = 4$

खालील किमती घेऊन वर्ग विस्तार सूत्रे पडताळा.

(i) $a = -7$, $b = 8$ (ii) $a = 11$, $b = 3$ (iii) $a = 2.5$, $b = 1.2$

विस्तार करा.

उदा. $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x) \times (3y) + (3y)^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

उदा. $(5x - 4)^2$

$= (5x)^2 - 2(5x) \times (4) + 4^2$

$= 25x^2 - 40x + 16$

उदा. $(51)^2$

$= (50 + 1)^2$

$= 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 \times 1$

$= 2500 + 100 + 1$

$= 2601$

उदा. $(98)^2$

$= (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

सरावसंच 50

1. विस्तार करा.

(i) $(5a + 6b)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$ (iii) $(2p - 3q)^2$ (iv) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$

(v) $(ax + by)^2$ (vi) $(7m - 4)^2$ (vii) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ (viii) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

2. $(8 - \frac{1}{x})$ या द्विपदीचा वर्ग खालीलपैकी कोणता ? योग्य पर्याय लिहा.

(i) $64 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $64 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $64 - \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$ (iv) $64 + \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$

3. $m^2n^2 + 14mnpq + 49p^2q^2$ हा वर्ग विस्तार खालीलपैकी कोणत्या राशींचा आहे ?

(i) $(m + n)(p + q)$ (ii) $(mn - pq)$ (iii) $(7mn + pq)$ (iv) $(mn + 7pq)$

4. विस्तार सूत्राचा उपयोग करून किंमत काढा.

(i) $(997)^2$ (ii) $(102)^2$ (iii) $(97)^2$ (iv) $(1005)^2$

जाणून घेऊया.

✲ $(a + b)$ $(a - b)$ चा विस्तार

$$
\begin{aligned}
(a + b)(a - b) &= (a + b) \times (a - b)\\
&= a\,(a - b) + b\,(a - b)\\
&= a^2 - ab + ba - b^2\\
&= a^2 - b^2\\
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

हे मला समजले.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

उदा. $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

उदा. $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$

सरावसंच 51

1. विस्तार सूत्र वापरून खालील गुणाकार लिहा.

(i) $(x + y)(x - y)$ (ii) $(3x - 5)(3x + 5)$

(iii) $(a + 6)(a - 6)$ (iv) $\left(\frac{x}{5}+6\right)\left(\frac{x}{5}-6\right)$

2. विस्तार सूत्राचा उपयोग करून किंमत काढा.

(i) 502×498 (ii) 97×103 (iii) 54×46 (iv) 98×102

जाणून घेऊया.

बैजिक राशींचे अवयव पाडणे.

आपण पूर्ण संख्यांचे अवयव पाडायला शिकलो आहोत. आता बैजिक राशींचे अवयव पाडण्याची क्रिया पाहू. प्रथम एकपदीचे अवयव पाहू.

$15 = 3 \times 5$ म्हणजे 3 व 5 हे 15 चे अवयव आहेत.

तसेच $3x = 3 \times x$ म्हणजे 3 व x हे $3x$ चे अवयव आहेत.

$5t^2$ ही राशी पाहा. $5t^2 = 5 \times t^2 = 5 \times t \times t$

$1, 5, t, t^2, 5t, 5t^2$ हे सगळे $5t^2$ चे अवयव आहेत.

$6\,ab^2 = 2 \times 3 \times a \times b \times b$

एकपदीचे अवयव पाडताना प्रथम सहगुणकाचे अवयव पाडता आले तर पाडावेत, नंतर चलभागाचे अवयव पाडावेत.

सरावसंच 52

⊙ खालील राशींचे सर्व अवयव सुटे करून राशी गुणाकार रूपात लिहा.

(i) $201\,a^3 b^2$ (ii) $91\,xyt^2$ (iii) $24\,a^2 b^2$ (iv) tr^2s^3

जाणून घेऊया.

द्विपदीचे अवयव पाडणे

$4xy + 8xy^2$ या द्विपदीतील प्रत्येक पदाचे 4 x आणि y हे अवयव आहेत.

$\therefore\ 4xy + 8xy^2 = 4(xy + 2xy^2) = 4x\,(y + 2xy) = 4xy\,(1 + 2y)$

दोन्ही पदांचे सामाईक अवयव शोधून ते कंसाबाहेर गुणाकाराच्या रूपात लिहीत गेले, की द्विपदीचे अवयव पाडता येतात.

$9a^2bc + 12abc^2 = 3(3a^2bc + 4abc^2) = 3abc\,(3a + 4c)$ याप्रमाणे अवयव पाडता येतात.

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$ हे सूत्र आपल्याला माहीत आहे.

यावरून, $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ असेही अवयव मिळतात.

अवयव पाडा.

उदा. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2$
$= (a + 2b)\,(a - 2b)$

उदा. $3a^2 - 27b^2 = 3(a^2 - 9b^2)$
$= 3(a + 3b)\,(a - 3b)$

सरावसंच 53

⊙ खालील राशींचे अवयव पाडा.

(i) $p^2 - q^2$ (ii) $4x^2 - 25y^2$ (iii) $y^2 - 4$ (iv) $p^2 - \frac{1}{25}$

(v) $9x^2 - \frac{1}{16}y^2$ (vi) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (vii) $a^2b - ab$ (viii) $4x^2y - 6x^2$

(ix) $\frac{1}{2}y^2 - 8z^2$ (x) $2x^2 - 8y^2$

❑❑❑

15 सांख्यिकी

3PL62Y

जाणून घेऊया.

सरासरी

अस्मिताला रोज घरापासून सायकलने शाळेत जाण्यासाठी किती मिनिटे लागतात ते दिले आहे.
अस्मिताला सोमवार ते शनिवार सायकलने शाळेत जाण्यासाठी लागलेला वेळ खालील सारणीत दिला आहे.

वार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
मिनिटे	20	20	22	18	18	20

यावरून असे दिसते की कधी तिला 18 मिनिटे लागतात, कधी 22 मिनिटे लागतात, तर कधी 20 मिनिटे लागतात. शाळेच्या 6 दिवसांचा विचार केला तर तिला शाळेत जाण्यासाठी दररोज अंदाजे किती मिनिटे लागतात ?

गणितात असा अंदाज करण्यासाठी सरासरी काढतात. येथे 6 दिवसांच्या मिनिटांची बेरीज करून त्या बेरजेला 6 ने भागले तर जी संख्या मिळते ती अंदाजे रोज लागणारी वेळ असते. ती या सर्व संख्यांची सरासरी आहे.

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{सहा दिवसांतील शाळेत जाण्यासाठी लागणाऱ्या मिनिटांची बेरीज}}{\text{एकूण दिवस}}$$

$$= \frac{20 + 20 + 22 + 18 + 18 + 20}{6} = \frac{118}{6} = 19\frac{2}{3}$$

अस्मिताला शाळेत जाण्यासाठी सरासरी $19\frac{2}{3}$ मिनिटे एवढा वेळ रोज लागतो.

उदा. एका शाळेने, विद्यार्थ्यांचे घर शाळेपासून किती दूर आहे हे जाणून घेण्यासाठी सर्वेक्षण केले. त्यांपैकी खाली सहा विद्यार्थ्यांचे त्यांच्या घरापासून शाळेपर्यंतचे अंतर दिले आहे. त्या अंतरांची सरासरी काढू.

950 मी, 800 मी, 700 मी, 1.5 किमी, 1 किमी, 750 मी.

उकल : विद्यार्थ्यांच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराची सरासरी काढण्याकरिता सर्व अंतरे एकाच एककात मोजावी लागतात.

1 किमी = 1000 मीटर
1.5 किमी = 1500 मीटर

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{सहा विद्यार्थ्यांचे घर व शाळा यांमधील अंतरांची बेरीज}}{\text{एकूण विद्यार्थी}}$$

$$= \frac{950 + 800 + 700 + 1500 + 1000 + 750}{6} = \frac{5700}{6} = 950 \text{ मी}$$

शाळेतील विद्यार्थ्यांचे घर व शाळा यांमधील अंतरांची सरासरी 950 मीटर आहे.

चला, चर्चा करूया.

उदा. एका आठवड्यात सातही दिवस दोरीच्या उड्यांचा सराव ऋतुजा करत होती. प्रत्येक दिवशी एका मिनिटात तिने मारलेल्या उड्यांची संख्या खाली दिली आहे.

60, 62, 61, 60, 59, 63, 58

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{सात दिवसांत मारलेल्या उड्यांची बेरीज}}{\text{एकूण दिवस}}$$

$$= \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{7} = \frac{\square}{\square}$$

एका मिनिटात मारलेल्या उड्यांची सरासरी = 60.42

ज्या संख्येबद्दल माहिती हवी, तिचे जेवढे नमुने आपल्याला दिलेल्या सामग्रीत मिळतात, त्यांना प्राप्तांक म्हणतात.

आपण जाणतो की, दोरीच्या उड्या नैसर्गिक संख्यांमध्ये मोजतात. कोणत्याही दिवशी अपूर्णांकात उड्या मारलेल्या नसतात. पण सरासरी अपूर्णांकात येऊ शकते.

हे मला समजले.

$$\text{सरासरी} = \frac{\text{दिलेल्या माहितीमधील सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{एकूण प्राप्तांकांची संख्या}}$$

उपक्रम : ✸ वर्गातील विद्यार्थ्यांचे 10 चे गट करून प्रत्येक गटातील मुलांच्या उंचीची सरासरी काढा.

✸ वर्गशिक्षकांकडून हजेरी पत्रक घेऊन एका आठवड्याची सरासरी हजेरी काढा.

सरावसंच 54

1. एका शहरामध्ये एका आठवड्यात पडलेला पाऊस मिमी मध्ये दिला आहे. त्यावरून आठवड्याची पावसाची सरासरी काढा.
   9, 11, 8, 20, 10, 16, 12
2. शाळेच्या स्नेहसंमेलनामध्ये स्वयंसिद्धा महिला बचत गटाने आपला खाद्यपदार्थांचा स्टॉल लावला होता. दर तासाला झालेली विक्री ₹ 960, ₹ 830, ₹ 945, ₹ 800, ₹ 847, ₹ 970 याप्रमाणे आहे. तर ताशी सरासरी किती रुपयांची विक्री झाली ?
3. विदर्भात 5 वर्षांत पडलेल्या पावसाची नोंद खाली दाखवली आहे. त्यावरून पावसाची 5 वर्षांतील सरासरी काढा.
   900 मिमी, 650 मिमी, 450 मिमी, 733 मिमी, 400 मिमी
4. एका शेतकऱ्याने पशुखाद्याची पोती आणली. त्यांची वजने कि.ग्रॅ मध्ये खाली दिली आहेत. तर पोत्यांचे सरासरी वजन काढा.
   49.8, 49.7, 49.5, 49.3, 50, 48.9, 49.2, 48.8

जाणून घेऊया.

वारंवारता वितरण सारणी (Frequency distribution table)

कधी कधी दिलेल्या माहितीमध्ये काही प्राप्तांक अनेक वेळा येतात. **एखादा प्राप्तांक किती वेळा आला आहे हे दाखवणाऱ्या संख्येला त्या प्राप्तांकाची वारंवारता म्हणतात.** अशावेळी वारंवारता सारणी तयार करतात. या सारणीमध्ये प्राप्तांक, ताळ्याच्या खुणा व वारंवारता असे तीन स्तंभ असतात.

1. पहिल्या स्तंभामध्ये लहान संख्येपासून सुरुवात करून मोठ्या संख्येपर्यंतचे प्राप्तांक लिहा.
   उदा. 1, 2, 3, 4, 5, 6 या संख्या एकाखाली एक क्रमाने मांडाव्या.
2. माहितीमधील संख्या क्रमाने वाचा. प्रत्येक वेळी माहितीमधील संख्या वाचली, की सारणीमध्ये त्या संख्येजवळच्या स्तंभात '।' अशी खूण करा. या खुणेला ताळ्याची खूण म्हणतात.
   जसे 3 ही संख्या वाचून 3 या संख्येसमोर दुसऱ्या स्तंभात '।' अशी खूण करा. चार खुणांपर्यंतच्या खुणा ।।।। अशा लिहिल्या तर पाचवी खूण ~~।।।।~~ अशी करा. त्यामुळे ताळ्याच्या एकूण खुणा मोजणे सोपे होते.
3. प्रत्येक संख्येसमोरील ताळ्याच्या एकूण खुणांची संख्या मोजून लिहा. तिला वारंवारता म्हणतात. तिसऱ्या स्तंभात वारंवारता लिहा.
4. शेवटी सर्व वारंवारतांची बेरीज करतात. ती N या अक्षराने दर्शवतात. ही बेरीज एकूण प्राप्तांकांइतकी असते.

दिलेल्या माहितीवरून वारंवारता सारणी तयार करणे

उदा. एका वर्गातील काही मुलींचे घरापासून शाळेपर्यंतचे अंतर (किमी) मध्ये दिले आहे.
1, 3, 2, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6
त्यावरून वारंवारता सारणी कशी तयार करतात ते पाहू.

प्राप्तांक	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
1	।।	2
2	।	1
3	।।	2
4	~~।।।।~~	5
5	।।	2
6	।।।	3
	एकूण वारंवारता	N = 15

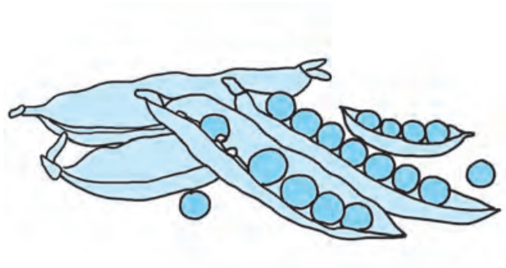
प्राप्तांक मोजताना जी संख्या मोजली, ती लक्षात ठेवण्यासाठी त्या संख्येवर रेघ ओढतात. येथे पहिले तीन प्राप्तांक मोजून झाल्यानंतर प्राप्तांकाची यादी प्राप्तांक मोजताना दिली आहे.
(~~1~~, ~~3~~, ~~2~~, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6)

गणित माझा सोबती : घरात, बाजारात

प्रियाच्या आईने बाजारातून वाटाण्याच्या शेंगा आणल्या. आईने शेंगा सोलण्यास सुरुवात केली. प्रिया जवळच बसून आपला गणिताचा अभ्यास करत होती. तिचे लक्ष सहज आई सोलत असलेल्या शेंगांकडे गेले. काही शेंगांमधून 4 दाणे तर काही शेंगांमधून 7 दाणे निघाले. मग प्रियाने त्यांतील 50 शेंगा उचलल्या, त्या सोलल्या आणि त्यांतील दाण्यांच्या संख्यांची नोंद घेतली.

प्रियाने वाटाण्याच्या शेंगांमधील दाण्यांची वारंवारता सारणी तयार केली.

दाण्यांची संख्या	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
2	卌 III	8
3	卌 卌 卌	15
4	卌 卌 II	12
5	II	2
6	卌 II	7
7	III	3
8	III	3
	एकूण वारंवारता	N = 50



4, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 3, 2, 8
2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 2, 8
8, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 3
4, 4, 3, 3, 2, 6, 4, 4, 7, 2
3, 6, 3, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 3

आई : तू सोललेल्या शेंगांमध्ये सरासरी किती दाणे निघाले हे काढता येईल का ?

प्रिया : या 50 संख्यांची बेरीज करून बेरजेला 50 ने भागायचे ना ? किचकट काम आहे.

आई : आपण ते काम सोपं करू. वारंवारता सारणीत 2 दाणे किती शेंगांमध्ये, 3 दाणे किती शेंगांमध्ये इत्यादी माहिती आहे ना ?

प्रिया : हो ! 2 दाणे 8 शेंगांमध्ये, 3 दाणे 15 शेंगांमध्ये, 4 दाणे 12 शेंगांमध्ये वगैरे माहिती आहे. आता आलं लक्षात. 2 × 8, 3 ×15, 4 × 12 असे गुणाकार करून त्यांची बेरीज केली तरी त्या पन्नास संख्यांची बेरीज मिळेल.

आई : सात लहान गुणाकार व त्यांची बेरीज करणं जरा सोपं आहे ना ! खूप मोठी सामग्री असते त्या वेळी वारंवारता सारणीचा असा उपयोग होतो.

प्रिया : मग एकूण प्राप्तांकांची बेरीज 206 आली म्हणून सरासरी = $\frac{206}{50}$ = 4.12 एवढी झाली.

आई : कोणत्याही शेंगेमध्ये वाटाण्याचे दाणे पूर्ण संख्येतच असतात पण सरासरी ही अपूर्णांकात येऊ शकते. येथे प्रत्येक शेंगेमध्ये साधारण 4 दाणे आहेत असे म्हणता येईल.

हे मला समजले.

- प्राप्तांकांचे वर्गीकरण सोप्या पद्धतीने करण्यासाठी ताळ्याच्या खुणांचा वापर करता येतो.
- खुणांची संख्या वारंवारता दाखवते, अशा प्रकारच्या सारणीला वारंवारता सारणी म्हणतात.
- प्राप्तांकांची संख्या मोठी असते त्या वेळी वारंवारता सारणीचा उपयोग सरासरी काढण्यासाठी होतो.

सरावसंच 55

1. एका वर्गातील 30 मुलांची उंची (सेमी) मध्ये दिली आहे. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   131, 135, 140, 138, 132, 133, 135, 133, 134, 135, 132, 133, 140, 139, 132, 131, 134, 133, 140, 140, 139, 136, 137, 136, 139, 137, 133, 134, 131, 140
2. एका वसाहतीमध्ये 50 कुटुंबे राहतात. प्रत्येक कुटुंबातील व्यक्तींची संख्या पुढे दिली आहे. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2.
3. एक फासा 40 वेळा फेकला तर वरच्या पृष्ठभागावर मिळालेल्या संख्यांची नोंद केली. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   3, 2, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 6, 2, 3, 5, 3, 5, 3, 4, 2, 4, 5, 4, 2, 6,
   3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 2, 2, 5, 3, 3, 4,
4. एका वसतिगृहाच्या खानावळीमध्ये 30 मुलांना जेवणामध्ये खालीलप्रमाणे पोळ्यांची संख्या लागते. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.
   3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2

सरासरीचा उपयोग विज्ञानाच्या सर्व शाखा, वैद्यक शाखा, भूगोल, अर्थशास्त्र, सामाजिक शास्त्रे इत्यादी विषयांतही होतो.

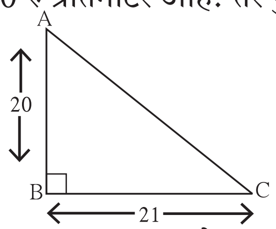
❑❑❑

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. एंजलने 15000 रुपये द.सा.द.शे. 9 दराने काही वर्षांसाठी बँकेत ठेवले. तिला मुदतीअखेर 5400 रुपये सरळव्याज मिळाले, तर तिने किती वर्षांसाठी रक्कम ठेवली ?
2. एका रस्त्याच्या डांबरीकरणाचे काम करण्यासाठी 10 मजुरांना 4 दिवस लागतात. तर 8 मजुरांना किती दिवस लागतील ?
3. नसरुद्दीन व महेश यांनी प्रत्येकी ₹ 40,000 व ₹ 60,000 गुंतवून व्यवसाय चालू केला. या व्यवसायात त्यांना 30% नफा झाला. तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला ?
4. एका वर्तुळाचा व्यास 5.6 सेमी आहे तर त्याचा परीघ काढा.
5. विस्तार करा.

   (i) $(2a - 3b)^2$ (ii) $(10 + y)^2$ (iii) $\left(\frac{p}{3}+\frac{q}{4}\right)^2$ (iv) $\left(y-\frac{3}{y}\right)^2$
6. सूत्राचा उपयोग करून गुणाकार करा.

   (i) $(x - 5)(x + 5)$ (ii) $(2a - 13)(2a + 13)$

   (iii) $(4z - 5y)(4z + 5y)$ (iv) $(2t - 5)(2t + 5)$
7. एका बैलगाडीच्या चाकाचा व्यास 1.05 मीटर आहे, तर चाकाच्या 1000 फेऱ्यांमध्ये बैलगाडी किती किलोमीटर अंतर कापेल ?
8. एका 40 मी लांबीच्या आयताकृती बागेचे क्षेत्रफळ 1000 चौमी आहे, तर बागेची रुंदी काढा व तसेच बागेची परिमिती काढा. या बागेभोवती दरवाजाची 4 मीटर जागा सोडून 3 पदरी कुंपण घालायचे आहे, त्याचा खर्च 250 रु प्रतिमीटर आहे. तर कुंपण घालण्यासाठी लागणारा खर्च काढा.
9. 

   आकृतीत दिलेल्या माहितीवरून कर्ण AC काढा तसेच ΔABC ची परिमिती काढा.
10. एका घनाची बाजू 8 सेमी आहे तर त्या घनाचे एकूण पृष्ठफळ किती ?
11. अवयव पाडा. $365y^4z^3 - 146y^2z^4$

बहुपर्यायी प्रश्न

खालील प्रश्नांना पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्या उत्तरांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

1. 33, 34, 35, x, 37, 38, 39 या संख्यांची सरासरी 36 आहे तर x ची किंमत .... असेल.

   (i) 40 (ii) 32 (iii) 42 (iv) 36
2. $(61^2 - 51^2)$ ही वर्गसंख्यांची वजाबाकी .... ही येते.

   (i) 1120 (ii) 1230 (iii) 1240 (iv) 1250
3. 2600 रुपयांची 8 : 5 या प्रमाणात, समीर व सुनीता या दोघांमध्ये वाटणी केली तर प्रत्येकाच्या वाट्याला .... व .... इतके रुपये येतील.

   (i) ₹ 1500, ₹ 1100 (ii) ₹ 1300, ₹ 900

   (iii) ₹ 800, ₹ 500 (iv) ₹ 1600, ₹ 1000

उत्तरसूची

सरावसंच 1 1. -- 2. -- 3. त्रिकोणाच्या अंतर्भागात
4. काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावर.
5. त्रिकोणाचा परिमध्य काढणे.

सरावसंच 2 --

सरावसंच 3 --

सरावसंच 4 --

सरावसंच 5 --

सरावसंच 6 1. (i) रेख MG ≅ रेख GR
(ii) रेख MG ≅ रेख NG (iii) रेख GC ≅ रेख GB
(iv) रेख GE ≅ रेख GR
2. (i) रेख AB ≅ रेख WA (ii) रेख AP ≅ रेख YC
(iii) रेख AC ≅ रेख PY (iv) रेख PW ≅ रेख BY
(v) रेख YA ≅ रेख YQ (vi) रेख BW ≅ रेख ZX
(वरील प्रश्नांसाठी प्रत्येकाची अनेक बरोबर उत्तरे येऊ शकतात.)

सरावसंच 7 ⊙ $\angle AOB \cong \angle BOC$, $\angle AOB \cong \angle RST$, $\angle AOC \cong \angle PQR$, $\angle DOC \cong \angle LMN$, $\angle BOC \cong \angle RST$

सरावसंच 8 ⊙ (i) 35 (ii) -54 (iii) -36 (iv) -56
(v) 124 (vi) 84 (vii) 441 (viii) -105

सरावसंच 9 1. (i) -6 (ii) $\frac{-7}{2}$ (iii) $\frac{-3}{4}$ (iv) $\frac{-2}{3}$
(v) $\frac{-17}{4}$ (vi) 6 (vii) $\frac{5}{3}$ (viii) $\frac{-1}{6}$ (ix) $\frac{6}{5}$
(x) $\frac{1}{63}$ 2. $24 \div 5$, $72 \div 15$, $-48 \div (-10)$ इ.
3. $-5 \div 7$, $-15 \div 21$, $20 \div (-28)$ इत्यादी अनेक

सरावसंच 10 1. 1 2. 4,5 व 17,19
3. 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 एकूण 16 मूळ संख्या
4. 59 व 61, 71 व 73 5. (2,3),(5,7), (11,12),(17,19),(29,30) इत्यादी अनेक 6. 2

सरावसंच 11 ⊙ (i) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
(ii) 3×19 (iii) 23 (iv) $2 \times 3 \times 5 \times 5$
(v) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$
(vi) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13$ (vii) $3 \times 3 \times 5 \times 17$
(viii) $2 \times 3 \times 3 \times 19$ (ix) 13×29 (x) 13×43

सरावसंच 12 1. (i) 5 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 1
(v) 2 (vi) 7 (vii) 3 (viii) 3 (ix) 1 (x) 21
2. (i) मसावि 25, संक्षिप्त रूप $\frac{11}{21}$
(ii) मसावि 19, संक्षिप्त रूप $\frac{4}{7}$
(iii) मसावि 23, संक्षिप्त रूप $\frac{7}{3}$

सरावसंच 13 1. (i) 60 (ii) 120 (iii) 288
(iv) 60 (v) 3870 (vi) 90 (vii) 1365 (viii) 180
(ix) 567 (x) 108
2. (i) 1; 1184 (ii) 1; 2346 (iii) 15; 60
(iv) 9; 126 (v) 26; 312

सरावसंच 14 1. (i) 30 (ii) 40, 20
2. (i) 14; 28 (ii) 16; 32 (iii) 17; 510
(iv) 23; 69 (v) 7; 588
3. (i) 252 (ii) 150 (iii) 1008 (iv) 60 (v) 240
4. 365 5. (i) $\frac{12}{11}$ (ii) $\frac{17}{19}$ (iii) $\frac{23}{29}$ 6. 144
7. 255 8. 14 मी 9. 18 व 20

सरावसंच 15 1. अंतर्भागातील बिंदू : R,C,N,X
बाह्यभागातील बिंदू : T, U, Q, V, Y
कोनांच्या भुजांवरील बिंदू : A, W, G, B
2. $\angle ANB$ व $\angle BNC$, $\angle BNC$ व $\angle ANC$, $\angle ANC$ व $\angle ANB$, $\angle PQR$ व $\angle PQT$
3. (i) संलग्न आहेत.
(ii) आणि (iii) संलग्न नाहीत कारण अंतर्भाग भिन्न नाहीत.
(iv) संलग्न आहेत.

सरावसंच 16 1. (i) 50° (ii) 27° (iii) 45°
(iv) 35° (v) 70° (vi) 0° (vii) $(90-x)^\circ$
2. 20° आणि 70°

सरावसंच 17 1. (i) 165° (ii) 95° (iii) 60°
(iv) 143° (v) 72° (vi) 180° (vii) $(180-a)^\circ$
2. कोटिकोनांच्या जोड्या : (i) $\angle B$ व $\angle N$
(ii) $\angle D$ व $\angle F$ (iii) $\angle Y$ व $\angle E$
पूरक कोनांच्या जोड्या : (i) $\angle B$ व $\angle G$ (ii) $\angle N$ व $\angle J$.
3. $\angle X$ व $\angle Z$ हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत.
4. 65° व 25°

5. (i) $\angle P$ व $\angle M$ (ii) $\angle T$ व $\angle N$ (iii) $\angle P$ व $\angle T$ (iv) $\angle M$ व $\angle N$ (v) $\angle P$ व $\angle N$ (vi) $\angle M$ व $\angle T$

6. $160°$ 7. $m\angle A = (160-x)°$

सरावसंच 18 1. किरण PL व किरण PM; किरण PN व किरण PT.

2. नाहीत. कारण त्या किरणांनी एक रेषा तयार होत नाही.

सरावसंच 19 ---

सरावसंच 20 1. $m\angle APB = 133°$, $m\angle BPC = 47°$, $m\angle CPD = 133°$

2. $m\angle PMS = (180 - x)°$, $m\angle SMQ = x°$, $m\angle QMR = (180 - x)°$

सरावसंच 21 1. $m\angle A = m\angle B = 70°$

2. $40°$, $60°$, $80°$ 3. $m\angle ACB = 34°$, $m\angle ACD = 146°$, $m\angle A = m\angle B = 73°$

सरावसंच 22 1. (i) $\frac{71}{252}$ (ii) $\frac{67}{15}$ (iii) $\frac{430}{323}$ (iv) $\frac{255}{77}$ 2. (i) $\frac{16}{77}$ (ii) $\frac{14}{45}$ (iii) $\frac{-13}{6}$ (iv) $\frac{7}{6}$

3. (i) $\frac{6}{55}$ (ii) $\frac{16}{25}$ (iii) $-\frac{2}{3}$ (iv) 0

4. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $-\frac{8}{3}$ (iii) $-\frac{39}{17}$ (iv) $\frac{1}{7}$ (v) $-\frac{3}{22}$

5. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{100}{121}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $-\frac{1}{6}$ (v) $\frac{2}{5}$ (vi) $-\frac{10}{7}$ (vii) $-\frac{9}{88}$ (viii) $\frac{25}{2}$

सरावसंच 23 ⊙(i) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{23}{30}, \frac{22}{30}, \frac{21}{30}$ (iii) $-\frac{9}{15}, -\frac{7}{15}, \frac{4}{15}$ (iv) $\frac{6}{9}, 0, -\frac{4}{9}$ (v) $-\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{17}{24}, \frac{11}{24}, \frac{-13}{24}$ (vii) $\frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$

(viii) $-\frac{1}{8}, -\frac{2}{8}, -\frac{5}{8}$ इत्यादी अनेक

सरावसंच 24 ⊙(i) 3.25 (ii) −0.875 (iii) 7.6 (iv) $0.41\dot{6}$ (v) $3.\overline{142857}$ (vi) $1.\dot{3}$ (vii) $0.\dot{7}$

सरावसंच 25 1. 149 2. 0 3. 4 4. 60 5. $\frac{17}{20}$

सरावसंच 26 1. -- 2.(i) 1024 (ii) 125 (iii) 2401 (iv) −216 (v) 729 (vi) 8 (vii) $\frac{64}{125}$ (viii) $\frac{1}{16}$

सरावसंच 27 ⊙(i) 7^6 (ii) $(-11)^7$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^8$ (iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^8$ (v) $(a)^{23}$ (vi) $\left(\frac{p}{5}\right)^{10}$

सरावसंच 28

1. (i) a^2 (ii) m^{-3} (iii) p^{-10} (iv) 1

2.(i) 1 (ii) 49 (iii) $\frac{4}{5}$ (iv) 16

सरावसंच 29 1. (i) $\left(\frac{15}{12}\right)^{12}$ (ii) 3^{-8} (iii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-12}$ (iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (v) 6^{20} (vi) $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}$ (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-20}$ (viii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-6}$ (ix) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (x) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

2. (i) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{6}{1}\right)^3$ किंवा 6^3 (iv) $\frac{1}{y^4}$

सरावसंच 30 1. (i) 25 (ii) 35 (iii) 17 (iv) 64 (v) 33

सरावसंच 31 --

सरावसंच 32 ⊙(i) एकपदी = $7x$; a ; 4
(ii) द्विपदी = $5y - 7z$; $5m - 3$
(iii) त्रिपदी = $3x^3 - 5x^2 - 11$; $3y^2 - 7y + 5$
(iv) बहुपदी = $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

सरावसंच 33 ⊙(i) $22p + 18q$ (ii) $18a + 24b + 21c$ (iii) $19x^2 - 20y^2$ (iv) $-11a^2b^2 + 44c$ (v) $3y^2 - 8y + 9$ (vi) $4y^2 + 10y - 8$

सरावसंच 34 ⊙(i) $xy + 7z$ (ii) $4x + 2y + 4z$ (iii) $-12x^2 + 16xy + 20y^2$ (iv) $-10x^2 + 24xy + 16y^2$ (v) $-12x + 30z - 19y$

सरावसंच 35 1. (i) $288x^2y^2$ (ii) $92xy^3z^2$
(iii) $48ac + 68bc$ (iv) $36x^2 + 73xy + 35y^2$
2. $(40x^2 + 49x + 15)$ चौसेमी

सरावसंच 36 1. $-2(7x + 12y)$ 2. $-345x^5y^4z^3$
3. (i) 1 (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 1 (iv) 3 (v) -5 (vi) $\frac{69}{5}$
4. 16 वर्षे, 11 वर्षे 5. 130 6. 30 नोटा 7. 132, 66

संकीर्ण 1 1. (i) 80 (ii) -6 (iii) -48 (iv) 25 (v) 8 (vi) -100 2. (i) 15; 675
(ii) 38; 228 (iii) 17; 1683 (iv) 8; 96
3. (i) $\frac{14}{17}$ (ii) $\frac{13}{11}$ (iii) $\frac{3}{4}$ 4. (i) 28 (ii) 15
(iii) 36 (iv) 45 (v) 16 5. --
6. (i) 77 (ii) 25 (iii) $\frac{49}{24}$ (iv) 1026
7. (i) $\frac{41}{48}$ (ii) $\frac{23}{20}$ (iii) -8 (iv) $\frac{63}{20}$ 8. --
9. -- 10. -- 11. -- 12.-- 13. (i) 55°
(ii) $(90 - a)°$ (iii) 68° (iv) $(50 + x)°$
14. (i) 69° (ii) 133° (iii) 0° (iv) $(90 + x)°$
15. -- 16. (i) 110° (ii) 55° (iii) 55°
17. (i) 5^7 (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$
18. (i) 1 (ii) $\frac{1}{1000}$ (iii) 64 (iv) 16
19. (i) $8a + 10b - 13c$
(ii) $21x^2 - 10xy - 16y^2$
(iii) $18m - n$ (iv) $2m - 19n + 11p$
20. (i) $x = -10$ (ii) $y = 5$

बहुपर्यायी प्रश्न 1. अंतर्मध्य 2. $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ 3. 3
4. $\frac{3}{2}$ 5. $10 \times 3 + (5 + 2)$

सरावसंच 37 1. ₹ 240 2. 32 पेंढ्या
3.18 किग्रॅ 4. ₹ 24000 5. ₹ 104000

सरावसंच 38 1. 10 दिवस; 4 दिवस 2. 50 पाने
3. 2 तास; 3 तास 4. 20 दिवस

सरावसंच 39 1. ₹ 12800; ₹ 16000
2. ₹ 10000; ₹ 24000 3. ₹ 38000; ₹ 9120
4. ₹ 147; ₹ 343 5. ₹ 54000; ₹ 15120

सरावसंच 40 1. ₹ 1770
2. ₹ 25000; ₹ 375000 3. ₹ 14875
4. ₹ 3600 5. ₹ 180000

सरावसंच 41 1. 10% 2. ₹ 300 3. 5 वर्षे
4. ₹ 41000 5. (i) ₹ 882, ₹ 5082
(ii) ₹ 5000, ₹ 6200 (iii) 2 वर्षे, ₹ 8800
(iv) ₹ 12000, 10 वर्षे (v) ₹ 19200, ₹ 21600

सरावसंच 42 1. (i) 14 सेमी; 44 सेमी
(ii) 14 सेमी; 88 सेमी (iii) 98 सेमी; 196 सेमी
(iv) 11.55 सेमी; 23.1 सेमी 2. 28 सेमी
3. ₹ 56320 4. 250 फेरे

सरावसंच 43 1. 240°
2. लघुकंसाची नावे : कंस PXQ, कंस PR, कंस RY, कंस XP, कंस XQ, कंस QY
विशालकंसाची नावे : कंस PYQ, कंस PQR, कंस RQY, कंस XQP, कंस QRX
अर्धवर्तुळकंसाची नावे : कंस QPR, कंस QYR
3. 250°

सरावसंच 44 1. 2 पट 2. 3 पट
3. 90 मी 4. 8 मी

सरावसंच 45 1. 144 चौसेमी 2. 75 चौसेमी
3. 46 सेमी 4. 9 पट

सरावसंच 46 1. 1170 चौसेमी 2. 8.64 चौसेमी
3. ₹ 2302750 4. 800 फरश्या ; 3200 फरश्या
5. 156 मी ; 845 चौमी

सरावसंच 47 **1.** (i) 54 चौसेमी (ii) 150 चौसेमी (iii) 311.04 चौमी (iv) 277.44 चौमी (v) 181.5 चौमी **2.** (i) 460 चौसेमी (ii) 58.8 चौसेमी (iii) 31.6 चौमी (iv) 171 चौसेमी **3.** 39.5 चौसेमी **4.** 6.5 चौमी, ₹ 1950

सरावसंच 48 **1.** (i) 25 एकक (ii) 40 एकक (iii) 15 एकक **2.** 26 सेमी **3.** 16 सेमी **4.** 12 मी

सरावसंच 49 **1.** (i) आहे (ii) नाही (iii) नाही (iv) नाही (v) आहे (vi) नाही

2. (i) आहे (ii) नाही (iii) आहे (iv) नाही (v) नाही

सरावसंच 50 **1.** (i) $25a^2+60ab+36b^2$

(ii) $\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}$ (iii) $4p^2-12pq+9q^2$

(iv) $x^2-4+\frac{4}{x^2}$ (v) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

(vi) $49m^2-56m+16$ (vii) $x^2+x+\frac{1}{4}$

(viii) $a^2-2+\frac{1}{a^2}$ **2.** $64-\frac{16}{x}+\frac{1}{x^2}$

3. $(mn+7pq)^2$ **4.** (i) 994009 (ii) 10404 (iii) 9409 (iv) 1010025

सरावसंच 51 **1.** (i) x^2-y^2 (ii) $9x^2-25$

(iii) a^2-36 (iv) $\frac{x^2}{25}-36$ **2.** (i) 249996 (ii) 9991 (iii) 2484 (iv) 9996

सरावसंच 52 ⊙(i) $3\times67\times a\times a\times a\times b\times b$

(ii) $13\times7\times x\times y\times t\times t$

(iii) $2\times2\times2\times3\times a\times a\times b\times b$

(iv) $t\times r\times r\times s\times s\times s$

सरावसंच 53 ⊙(i) $(p+q)(p-q)$

(ii) $(2x+5y)(2x-5y)$ (iii) $(y+2)(y-2)$

(iv) $\left(p+\frac{1}{5}\right)\left(p-\frac{1}{5}\right)$ (v) $\left(3x+\frac{1}{4}y\right)\left(3x-\frac{1}{4}y\right)$

(vi) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (vii) $ab(a-1)$

(viii) $2x^2(2xy-3x)$ (ix) $\frac{1}{2}(y+4z)(y-4z)$

(x) $2(x+2y)(x-2y)$

सरावसंच 54 **1.** 12.29 मिमी **2.** ₹ 892 **3.** 626.6 मिमी **4.** 49.4 किग्रॅ

सरावसंच 55 **1.**

उंची	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	एकूण
मुले	3	3	5	3	3	2	2	1	3	5	30

2.

व्यक्ती	1	2	3	4	5	एकूण
कुटुंबे	1	13	16	13	7	50

3.

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	एकूण
वारंवारता	2	8	13	8	5	4	40

4.

पोळ्या	2	3	4	5	एकूण
मुले	9	10	8	3	30

संकीर्ण 2 **1.** 4 वर्षे **2.** 5 दिवस

3. ₹ 12000 ; ₹ 18000 **4.** 17.6 सेमी

5. (i) $4a^2-12ab+9b^2$ (ii) $100+20y+y^2$

(iii) $\frac{p^2}{9}+\frac{pq}{6}+\frac{q^2}{16}$ (iv) $y^2-6+\frac{9}{y^2}$

6. (i) x^2-25 (ii) $4a^2-169$ (iii) $16z^2-25y^2$ (iv) $4t^2-25$ **7.** 3.3 किमी

8. 25 मी ; 130 मी ; ₹ 94500

9. 29 एकक ; 70 एकक **10.** 384 सेमी^{2}

11. $73y^2z^3(5y^2-2z)$

बहुपर्यायी प्रश्न **1.** 36 **2.** 1120 **3.** ₹ 1600, ₹ 1000.

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे–४११००४.

₹४१.००